

**DEHN-SURGERY AN KNOTEN
IN DER DREIDIMENSIONALEN SPHÄRE**

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

GERHARD KRAUSE

Bochum 1983





Digitized by the Internet Archive
in 2026

DEHN-SURGERY AN KNOTEN IN DER DREIDIMENSIONALEN SPHÄRE

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

Gerhard Krause

Bochum 1983

Dissertation eingereicht am: 23.6.1983

Tag der mündlichen Prüfung: 15.7.1983

Referent: Prof. Dr. H. Zieschang

Korreferent: Privatdozent Dr. B. Zimmermann

INHALT

	Seite
0. Einleitung	1
1. Dehn-Surgery	6
2. Homotopieäquivalenz	10
3. Eine Abbildung von Brody	20
4. Homöomorphie	25
5. Beispiele	42
6. Surgery an Torusknoten	47
Symbolverzeichnis	60
Literatur	61

0. EINLEITUNG

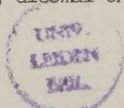
Ein grundlegendes Problem in der Theorie der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ist das Homöomorphieproblem, d.h. zu entscheiden, ob zwei konkrete 3-Mannigfaltigkeiten homöomorph sind. Dieses Problem ist bisher nicht allgemein gelöst. Als gute Homöomorphieinvariante dient die Fundamentalgruppe. Allerdings ist es oft sehr schwierig zu entscheiden, ob zwei gegebene Gruppenbeschreibungen isomorphe Gruppen charakterisieren. Auch hierfür existiert bisher kein allgemeines Verfahren.

Außerdem reicht die Fundamentalgruppe in bestimmten Fällen nicht aus, wie anhand der Linsenräume $L_{p,q}$ zu sehen ist. $L_{p,q}$ besitzt eine zyklische Fundamentalgruppe der Ordnung p für alle q . In [Rei] wird die PL-Klassifikation der Linsenräume durch Betrachtung der Operation von $\pi_1(L_{p,q})$ auf S^3 , der universellen Überlagerung von $L_{p,q}$, erreicht. PL bedeutet "piecewise linear" (siehe [Ro] S. 100). Wegen der in [Moi] bewiesenen Hauptvermutung, welche besagt, daß 3-Mannigfaltigkeiten im wesentlichen nur eine PL-Struktur besitzen, handelt es sich dabei bereits um eine Homöomorphieklassifikation. Es gilt:

$$0.1 \quad L_{p,q_1} \approx L_{p,q_2} \Rightarrow q_2 \equiv \pm q_1^{\pm 1} \pmod{p}$$

Es kann leicht durch Konstruktion bewiesen werden, daß auch die Umkehrung von 0.1 gilt.

Meistens ist die universelle Überlagerung eines Raumes nicht bekannt, so daß die Methode aus [Rei] nicht anwendbar ist. Es ist nötig, weitere Invarianten zu entwickeln, was in [Bro] geschieht. Dort wird 0.1 erneut mit Hilfe einer Abbildung Δ^* bewiesen, diesmal ohne Verwendung



der Hauptvermutung. Δ^* ist für eine beliebige geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M definiert. Dabei wird aus jeder Klasse in $H_1(M)$ ein repräsentierender PL-Knoten $\kappa \hookrightarrow M$ genommen, und dessen Alexanderpolynom in einem von κ abhängenden Gruppenring "eingebettet". Δ^* ist somit eine Abbildung von $H_1(M)$ in die Vereinigung bestimmter Gruppenringe.

Aufbauend auf die Ergebnisse aus [Bro] werden in dieser Arbeit Räume aus einer Teilklasse der geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten auf Homotopieäquivalenz und Homöomorphie untersucht. Diese, die Linsenräume umfassende, Teilklasse enthält die Mannigfaltigkeiten $M_{p,q}(k)$, welche durch Dehn-Surgery an einem in S^3 liegenden PL-Knoten k entstehen. Die nach M. Dehn benannte Konstruktion beinhaltet Ausbohren und Umlieben einer regulären Umgebung von k , wobei der Umlieprozess durch zwei teilerfremde ganze Zahlen p und q , $p \geq 0$, beschrieben wird (siehe [Ro] S. 257). Speziell handelt es sich bei $M_{p,q}(k)$ um den Linsenraum $L_{p,q}$, falls k dem trivialen Knoten gleich ist. In [L] und [W] wird gezeigt, daß sich jede geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit durch die entsprechende Verallgemeinerung von Surgery an endlich vielen disjunkten PL-Knoten in S^3 (den sogenannten Verkettungen) konstruieren läßt.

Der Homotopietyp von $M_{p,q}(k)$ bestimmt die Zahl p eindeutig, da $H_1(M_{p,q}(k))$ eine zyklische Gruppe der Ordnung p ist. Aus der Existenz einer Homotopieäquivalenz zwischen zwei Surgery-Mannigfaltigkeiten $M_{p,q_1}(k_1)$ und $M_{p,q_2}(k_2)$ folgt (Satz 2.4):

$$q_1 \cdot q_2 \text{ ist bis aufs Vorzeichen quadratisch mod } p.$$

Der Beweis verwendet Schnittzahlen und verallgemeinert denjenigen auf S. 37 aus [H], wo die entsprechende Aussage für Linsenräume bewiesen wird. Genauer gilt: (Korollar 2.5)

$$0.2 \quad M_{P,q_1}(k_1) \approx M_{P,q_2}(k_2) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{Z}, (v,p) = 1, \text{ mit: } q_2 \equiv \pm v^2 q_1 \pmod{p}$$

Dabei wird v durch den von der Homotopieäquivalenz induzierten Isomorphismus zwischen den zyklischen ersten Homologiegruppen beider Räume bestimmt.

Bei der Betrachtung von Homöomorphie ist eine Unterscheidung der beiden Fälle $p = 0$ und $p \geq 1$ sinnvoll. Für $p = 0$ gilt (Satz 4.7):

$$0.3 \quad M_{0,1}(k_1) \approx M_{0,1}(k_2) \Rightarrow \Delta_{k_1}(t) = \Delta_{k_2}(t)$$

d.h.: k_1 und k_2 haben gleiches Alexanderpolynom. Zur Definition des Alexanderpolynoms eines Knotens siehe [Ro] Seite 160. Die Aussage 0.3 verallgemeinert folgendes Resultat, welches in [Mo2] und [N] bewiesen wird:

$$M_{0,1}(k) \approx S^2 \times S^1 \Rightarrow \Delta_k(t) = 1.$$

In dem Fall $p \geq 1$ wird in Satz 4.8 unter der Voraussetzung

$M_{P,q_1}(k_1) \approx M_{P,q_2}(k_2)$ zusätzlich zu der Formel $q_2 \equiv \pm v^2 q_1 \pmod{p}$ aus 0.2 folgende wesentlich schärfere Bedingung für v bewiesen:

$$0.4 \quad (t-1)(t^{v^2 q_1 - 1}) \Delta_{k_1}(t^{v q_1}) \equiv (t^v - 1)(t^{v q_1 - 1}) \Delta_{k_2}(t^{v^2 q_1}) \pmod{t^{p-1}}$$

Es handelt sich dabei um eine bis auf triviale Einheiten geltende Gleichung in dem Gruppenring $\mathbb{Z}\langle t | t^p = 1 \rangle$, in die neben v und q_1 auch die Alexanderpolynome von k_1 und $k_2 \pmod{t^{p-1}}$ gerechnet) eingehen. Der Beweis zu 0.3 und 0.4 verwendet hauptsächlich die Abbildung Δ^* aus

[Bro]. In Korollar 4.11 wird gezeigt, daß 0.4 die Linsenraumklassifikation 0.1 als Spezialfall enthält. Für bestimmte Knoten wird dort allgemeiner folgende Aussage bewiesen:

$$0.5 \quad M_{p,q_1}(k) \approx M_{p,q_2}(k) \Rightarrow q_2 \equiv \pm q_1^{\pm 1} \pmod{p}$$

Speziell gilt 0.5 für Knoten k mit trivialem Alexanderpolynom. Anhand eines Beispiels wird in Kap. 5 dargelegt, daß 0.5 nicht für alle Knoten gilt.

Die Bedingungen aus 0.2 bis 0.4 ermöglichen in Einzelfällen eine Unterscheidung nach Homöomorphie (siehe Kap. 5). Eine vollständige Klassifikation lassen sie, von den Linsenräumen abgesehen, nicht zu. Bei Beschränkung auf Torusknoten (siehe Definition auf S. 3.11 von [Skript 2]) kann dies mit anderen Methoden erreicht werden. Am Anfang von Kapitel 6 wird anhand eines Beispiels gezeigt, daß die Ergebnisse aus [Mo1] zu einer vollständigen Klassifikation nicht ausreichen. Deshalb werden von diesen Räumen (es handelt sich bis auf Ausnahmen um Seifert'sche Faseräume) alle Faserinvarianten bestimmt. Dies geschieht in Satz 6.5 hauptsächlich durch Vereinfachung der Surgerybeschreibung mit Hilfe des Kirby-Kalküls.

Die Inhalte der einzelnen Kapitel sind im folgenden kurz zusammengefaßt:

Kapitel 1: Die Surgery-Mannigfaltigkeiten $M_{p,q}(k)$ werden definiert, einige elementare Eigenschaften aufgezählt, sowie die Bedeutung dieser Konstruktion beschrieben.

Kapitel 2: Die Aussage 0.2 für homotopieäquivalente Surgery-Mannigfalt-

tigkeiten wird in Satz 2.4 und Korollar 2.5 bewiesen.

Kapitel 3: Die Abbildung Δ^* aus [Bro] wird definiert und eine natürliche Eigenschaft abgeleitet.

Kapitel 4: Für eine beliebige Surgery-Mannigfaltigkeit $M_{p,q}(k)$ wird die Abbildung Δ^* berechnet und auf das Homöomorphieproblem angewandt. Satz 4.6 enthält das allgemeinste mit Δ^* zu erreichende Ergebnis, welches im folgenden äquivalent vereinfacht wird. Dies geschieht getrennt für $p = 0$ und $p \geq 1$ in den Sätzen 4.7 und 4.8, wo 0.3 und 0.4 bewiesen werden. In Korollar 4.11 wird die Aussage 0.5 für eine spezielle Knotenklasse bewiesen.

Kapitel 5: Es wird der Kirby-Kalkül beschrieben, welcher die Modifikation von Surgerybeschreibungen ermöglicht. Die Sätze aus Kap. 4 werden auf einzelne Beispiele angewandt.

Kapitel 6: Die Surgery-Mannigfaltigkeiten von den Torusknoten werden in Satz 6.5 mit Hilfe des Kirby-Kalküls klassifiziert.

1. DEHN-SURGERY

Durch Surgery, d.h. Ausbohren und Umkleben einer regulären Umgebung eines PL-Knotens in der 3-Sphäre, lassen sich geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten konstruieren. Folgende feste Notationen und elementare Eigenschaften werden im weiteren verwandt. $\mathbb{R}$ und damit $S^3 \approx \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ seien gemäß dem Rechte-Hand-Drehsinn fest orientiert. $k \hookrightarrow S^3$ sei ein orientierter PL-Knoten. k besitzt einen Volltorus V als reguläre Umgebung, welche mit $D^2 \times S^1$ identifiziert wird. Das Äußere $X := S^3 \setminus V$ von k hat mit V die Torusfläche $\partial X = \partial V$ gemeinsam als Rand.

In $\partial X = \partial V$ gibt es zwei orientierte bis auf ambiente Isotopie eindeutig bestimmte Kurven, den Meridian m und den Längskreis l , für die gilt: m ist nullhomotop in V und hat mit k bezüglich der Orientierung von S^3 die Verschlingungszahl 1, $l \sim 0$ in X und $l \sim k$ in V , m und l schneiden sich in einem Punkt (siehe [Skript 2] S. 3.1-3.5). Es gilt:

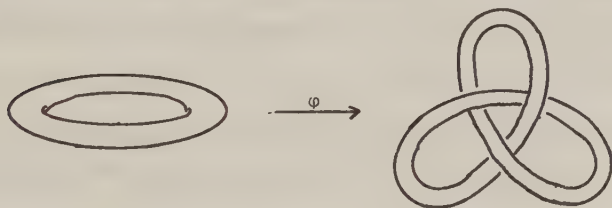
$$1.1 \quad \pi_1(\partial X) \approx \langle m, l \mid [m, l] = 1 \rangle, H_1(X) \approx \langle m \mid - \rangle$$

Auch im folgenden gelte die Konvention, daß Kurven mit den von ihnen in Fundamental- und Homologiegruppen repräsentierten Elementen gleichbenannt werden. Im Rand von $V = D^2 \times S^1$ sollen μ und λ die Kurven $\partial D^2 \times \{1\}$ bzw. $\{1\} \times S^1$ bezeichnen. Sie werden ebenfalls Meridian und Längskreis genannt und sind vor dem Ausbohren von V identisch mit m und l . Es gilt:

$$1.2 \quad \pi_1(\partial V) \approx \langle \mu, \lambda \mid [\mu, \lambda] = 1 \rangle, \pi_1(V) \approx \langle \lambda \mid - \rangle$$

1.3 DEFINITION UND SATZ

Für einen PL-Knoten $k \hookrightarrow S^3$ mit X als Äußerem und zwei teilerfremden Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt es $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $ps - rq = -1$, sowie einen Homöomorphismus $\varphi: \partial V \rightarrow \partial X$, welcher die Abbildung $\varphi: \pi_1(\partial V) \rightarrow \pi_1(\partial X)$, mit $\mu \mapsto m^{p,q}$ und $\lambda \mapsto m^{r,s}$, induziert. Die Surgery-Mannigfaltigkeit $M := X \cup_{\varphi} V$ ist bis auf Homöomorphie eindeutig durch p, q und der Isotopieklasse des Knotens k bestimmt und wird mit $M_{p,q}(k)$ bezeichnet.



Die Orientierung von k spielt keine Rolle, wohl aber diejenige von S^3 . Wegen $M_{p,q}(k) \approx M_{-p,-q}(k)$ läßt sich o.B.d.A. $p \geq 0$ voraussetzen (siehe [Ro] S. 257-259). Für den gespiegelten Knoten $-k$ gilt:

$$1.4 \quad M_{p,q}(-k) \approx M_{p,-q}(k)$$

Für eine Surgery-Mannigfaltigkeit $M_{p,q}(k) = X \cup_{\varphi} V$ mit der Klebeabbildung φ aus Def. 1.3 gilt:

$$1.5 \quad \mu = p \cdot m \text{ in } H_1(X) \approx \langle m | - \rangle, \quad \lambda = -p \cdot \lambda \text{ in } H_1(V) \approx \langle \lambda | - \rangle$$

1.6 $H_1(M_{p,q}(k))$ ist endlich zyklisch von der Ordnung p und wird sowohl von m , als auch λ als auch von t - der Seele von V - erzeugt. In $H_1(M_{p,q}(k))$ gilt:

$$m = q \cdot \lambda, \lambda = r \cdot m \text{ und } t = \lambda$$

Man beachte, daß r wegen $rq \equiv 1 \pmod{p}$ eindeutig mod p bestimmt ist.

Zum Beweis von 1.5 und 1.6 betrachte man φ sowie $\varphi^{-1}: \pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(\partial V)$, mit $m \mapsto \mu^{-s} \lambda^q$, $l \mapsto \mu^r \lambda^{-p}$, und verwende den Satz von Seifert-van Kampen (siehe [Skript 1] S. 32.11). $\square$

Falls k dem trivialen Knoten gleich ist, erhält man mit den Mannigfaltigkeiten $M_{p,q}(k)$ die Linsenräume $L_{p,q}$. Die Räume S^3 und $S^2 \times S^1$, welche dabei für $p = 1$ bzw. $p = 0$ entstehen, seien den Linsenräumen zugeordnet (siehe [Ro] S. 260).

Dehn beschrieb die obige Surgery-Konstruktion erstmalig in [D], um beliebig viele Homologiesphären $M_{1,q}(k)$ zu konstruieren. Zur Beweiskorrektur des in [D] aufgestellten, in dieser Arbeit nicht verwandten, Dehnschen Lemmas siehe [Kn] sowie [P]. Ein interessantes Problem ist die Frage, inwieweit der Homöomorphietyp von $M_{p,q}(k)$ die Zahl q und den Knoten k bestimmt. Während p wegen 1.6 festgelegt ist, gilt dies für q und k im allgemeinen nicht: In [Bra] werden systematisch Beispiele von homöomorphen Surgery-Mannigfaltigkeiten an verschiedenen Knoten (mit teilweise gleichen q 's) konstruiert. Auch bei festem k und verschiedenen q 's können homöomorphe Mannigfaltigkeiten entstehen, wie anhand der Kleeblattschlinge in Kap. 5 gezeigt wird.

Die Bedeutung der Surgery-Mannigfaltigkeiten für die Knotentheorie ergibt sich daraus, daß $M_{p,q}(-)$ für feste p, q eine Knoteninvariante ist. So gilt zum Beispiel:

$$1.7 \quad k \text{ amphicheiral} \Rightarrow M_{p,q}(k) \approx M_{p,-q}(k) \quad \forall p, q$$

Von besonderer Bedeutung für einen Knoten k sind die Homologiesphären $M_{1,q}(k)$. Es wird vermutet, daß jeder nichttriviale Knoten die sogenannte "Property P" besitzt:

$$1.8 \quad \pi_1(M_{1,q}(k)) = 1 \iff q = 0$$

Ein Knoten mit Property P ist eindeutig durch sein Äußeres X bestimmt (siehe [Ro] S. 280 und [G] S. 8).

Die Surgerykonstruktion aus Def. 1.3 läßt sich kanonisch für eine endliche Anzahl disjunkter PL-Knoten in S^3 (einer sogenannten Verkettung) verallgemeinern. Lickorish und Wallace bewiesen unabhängig voneinander, daß man jede geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit durch Surgery an einer Verkettung erhalten kann.

2. HOMOTOPIEÄQUIVALENZ

Es soll eine notwendige Bedingung für die Homotopieäquivalenz zweier Surgery-Mannigfaltigkeiten abgeleitet werden. Der Beweis verallgemeinert den für Linsenräume aus [H], S. 37, und ist ausführlicher. Sei $M := M_{p,q}(k) = X \cup_{\varphi} V$ eine Surgery-Mannigfaltigkeit. Im folgenden werden sämtliche Bezeichnungen aus Definition 1.3 fest übernommen. Die nächsten drei Lemmata gelten auch, falls X durch V ersetzt wird.

2.1 LEMMA

Für $p \geq 1$ gilt: i) $H_2(X) = 0$, $H_2(M) = 0$

ii) $H_1(M, X) = 0$, $H_2(M, X) \approx \mathbb{Z}$

iii) $H_j(M; \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_p$, $j = 0, 1, 2, 3$

BEWEIS

i) Man betrachte die lange exakte Homologiesequenz für $(X, \partial X)$:

$$H_1(\partial X) \xrightarrow{\alpha} H_1(X) \xrightarrow{\partial} H_1(X, \partial X) \rightarrow H_0(\partial X) \xrightarrow{\beta} H_0(X) \rightarrow H_0(X, \partial X) \rightarrow 0$$

β ist bijektiv, da ∂X und X wegezusammenhängend sind $\Rightarrow$

$H_0(X, \partial X) = 0$ und ∂ ist surjektiv. Weil $H_1(X)$ nach 1.5 von dem Meridian m erzeugt wird, ist α surjektiv und ∂ somit trivial $\Rightarrow$

$H_1(X, \partial X) = 0$. Aus dem universellen Koeffiziententheorem für Kohomologie folgt:

$$H^1(X, \partial X) \approx \text{Ext}(H_0(X, \partial X); \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(H_1(X, \partial X); \mathbb{Z}) \approx \text{Ext}(0; \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(0; \mathbb{Z}) = 0$$

Mit dem Dualitätssatz ergibt sich: $H_2(X) \approx H^1(X, \partial X) = 0$.

Aus $H_1(M) \approx \mathbb{Z}_p$ (1.6) und dem universellen Koeffiziententheorem für Kohomologie folgt:

$$H^1(M) \approx \text{Ext}(H_0(M); \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(H_1(M); \mathbb{Z}) \approx \text{Ext}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}) = 0$$

(wegen $p \geq 1$). Nach dem Dualitätssatz gilt: $H_2(M) \approx H^1(M) = 0$.

ii) Man betrachte die lange exakte Homologiesequenz für (M, X) :

$$H_2(M) \rightarrow H_2(M, X) \xrightarrow{\partial} H_1(X) \xrightarrow{\alpha} H_1(M) \xrightarrow{\beta} H_1(M, X) \rightarrow H_0(X) \xrightarrow{\gamma} H_0(M).$$

γ ist bijektiv, weil X und M wegezusammenhängend sind

$\Rightarrow \beta$ ist surjektiv. Da $H_1(M)$ nach 1.6 von m erzeugt wird, ist α surjektiv und β somit trivial $\Rightarrow H_1(M, X) = 0$.

Wegen $H_2(M) = 0$ (Teil i) ergibt sich folgende exakte Teilsequenz:

$$0 \rightarrow H_2(M, X) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_p \rightarrow 0. \text{ Wegen } p \geq 1 \text{ gilt Kern } \alpha \neq 0 \text{ und } H_2(M, X) \text{ ist}$$

zu einer nichttrivialen Untergruppe von $\mathbb{Z}$ isomorph

$$\Rightarrow H_2(M, X) \approx \mathbb{Z}.$$

iii) Aus dem universellen Koeffiziententheorem folgt:

$$H_j(M; \mathbb{Z}_p) \approx (H_j(M) \otimes \mathbb{Z}_p) \oplus (H_{j-1}(M) * \mathbb{Z}_p).$$

Wegen $H_0(M) \approx H_3(M) \approx \mathbb{Z}$, $H_1(M) \approx \mathbb{Z}_p$ und $H_2(M) = 0$ gilt: Für $j = 0, 1$

und 3 ist der rechte Summand trivial und der linke isomorph zu $\mathbb{Z}_p$.

Für $j = 2$ ist der linke Summand trivial, für den rechten gilt:

$$H_1(M) * \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z}_p \text{ (wegen } p \geq 1). \quad \square$$

2.2 LEMMA

Die Abbildungen α und β aus folgendem Diagramm seien der langen exakten Homologiesequenz für (M, X) bzw. dem universellen Koeffiziententheorem entnommen:

$$H_2(M; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\alpha} H_2(M, X; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\beta} H_2(M, X) \otimes \mathbb{Z}_p.$$

Für $p \geq 1$ gilt: α und β sind Isomorphismen.

BEWEIS

Aus dem universellen Koeffiziententheorem folgt mit Lemma 2.1:

$$H_2(X; \mathbb{Z}_p) \approx (H_2(X) \otimes \mathbb{Z}_p) \oplus (H_1(X) * \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_p = 0.$$

$$H_2(M, X; \mathbb{Z}_p) \approx (H_2(M, X) \otimes \mathbb{Z}_p) \oplus (H_1(M, X) * \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z}_p.$$

$$H_2(M; \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_p \Rightarrow \text{Das Teilstück } H_2(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_2(M; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\alpha} H_2(M, X; \mathbb{Z}_p)$$

der langen exakten Homologiesequenz entspricht der Sequenz:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_p.$$

$\Rightarrow \alpha$ ist injektiv und wegen $p \geq 1$ auch surjektiv.

Für β ergibt sich aus dem universellen Koeffiziententheorem folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow H_2(M, X) \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\beta} H_2(M, X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_1(M, X) * \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

Aus $H_1(M, X) * \mathbb{Z}_p = 0$ folgt, daß β ein Isomorphismus ist. $\square$

2.3 LEMMA

In $H_1(X) \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\alpha} H_1(X; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\beta} H_1(M; \mathbb{Z}_p)$ sei α dem universellen Koeffiziententheorem entnommen und β von der Einbettung $X \hookrightarrow M$ induziert.

Für $p \geq 1$ gilt: α und β sind Isomorphismen

BEWEIS

Aus der funktoriellen Eigenschaft des universellen Koeffiziententheorems ergibt sich für die Einbettung $\beta: X \hookrightarrow M$ folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_1(X) \otimes \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\alpha} & H_1(X; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H_0(X) * \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta \otimes \text{id} & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta * \text{id} \\
 0 & \longrightarrow & H_1(M) \otimes \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\alpha'} & H_1(M; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H_0(M) * \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Wegen $H_0(X) * \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_p = 0$ und $H_0(M) * \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_p = 0$ sind α und α' Isomorphismen. $\beta \otimes \text{id}$ ist surjektiv, da $m \otimes 1$ nach 1.1 und 1.6 sowohl $H_1(X) \otimes \mathbb{Z}_p$ als auch $H_1(M) \otimes \mathbb{Z}_p$ erzeugt. Wegen $H_1(X) \otimes \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_p \sim \mathbb{Z}_p$, $H_1(M) \otimes \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z}_p$ und wegen $p \geq 1$ ist $\beta \otimes \text{id}$ bereits bijektiv. Es folgt aus der Kommutativität, daß auch β ein Isomorphismus ist. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich das Hauptergebnis dieses Kapitels beweisen:

2.4 SATZ

Für zwei Surgery-Mannigfaltigkeiten $M_{p,q_1}(k_1)$ und $M_{p,q_2}(k_2)$ gilt:

$$M_{p,q_1}(k_1) \text{ homotopieäquivalent zu } M_{p,q_2}(k_2) \Rightarrow \\ q_1 q_2 \text{ oder } -q_1 q_2 \text{ ist quadratisch mod } p$$

BEWEIS

Es seien $M_1 := M_{p,q_1}(k_1) = X_1 \cup_{\phi_1} V_1$ und $M_2 := M_{p,q_2}(k_2) = X_2 \cup_{\phi_2} V_2$. Falls $p = 0$ gilt, so folgt $q_1 = \pm q_2 = \pm 1$ und die Behauptung ist trivial. Deshalb sei $p \geq 1$ angenommen. Für eine Homotopieäquivalenz $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ kann o.B.d.A. vorausgesetzt werden:

$$2.4.1 \quad \psi(V_1) \subset X_2.$$

Dies gilt, da durch eine ambiente Isotopie von M_2 erreicht werden kann, daß das ψ -Bild der Seele von V_1 die Seele von V_2 nicht trifft, und das Entsprechende auch für reguläre Umgebungen gilt. Es wird im folgenden mit Schnittzahlen mod p gerechnet. Diese definieren für eine 3-Mannigfaltigkeit M eine bilineare Abbildung:

$$H_1(M; \mathbb{Z}_p) \times H_2(M; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{Z}_p. \text{ Zwei Fundamentalklassen } z_1 \in H_3(M_1) \text{ und } z_2 \in H_3(M_2) \text{ sind bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt, und es gilt: } \psi(z_1) = \pm z_2.$$

In M_1 und M_2 seien die Schnittzahlen in bezug auf die Fundamentalklassen $z_1 \otimes 1 \in H_3(M_1; \mathbb{Z}_p)$ bzw. $z_2 \otimes 1 \in H_3(M_2; \mathbb{Z}_p)$ definiert. Nach der Invarianz für Schnittzahlen gilt für zwei Elemente $m \in H_1(M_1; \mathbb{Z}_p)$ und $f \in H_2(M_1; \mathbb{Z}_p)$ folgende Gleichung (siehe [Skript 1] Abschnitt 67

und [S-T] Paragraph 69-75):

$$2.4.2 \quad \psi(m) \bullet \psi(f) \equiv \pm m \bullet f \pmod{p}$$

Der Meridian m_1 von k_1 repräsentiert ein Element $\bar{m}_1 \in H_1(M_1; \mathbb{Z}_p)$. Nach [Sei2] existiert in X_1 eine sogenannte Seifertfläche $F \subset X_1$, welche von l_1 berandet wird. F repräsentiert ein Element $f_1 \in H_2(M_1, V_1)$. Nach 1.5 gilt in $H_1(V_1)$:

$$2.4.3 \quad \partial f_1 = l_1 = -p \cdot \lambda_1$$

F läßt sich demnach auch als ein Element $\bar{f}_1 \in H_2(M_1; \mathbb{Z}_p)$ auffassen. Weil sich m_1 und $l_1 = \partial F$ in einem Punkt schneiden, gilt:

$$2.4.4 \quad \bar{m}_1 \bullet \bar{f}_1 \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

Der Längskreis λ_2 vom Volltorus V_2 repräsentiert ein Element $\bar{\lambda}_2 \in H_1(M_2; \mathbb{Z}_p)$. In V_2 existiert eine Kreisscheibe $D \subset V_2$, die sogenannte Meridianfläche, welche von μ_2 berandet wird. D repräsentiert ein Element $d_2 \in H_2(M_2, X_2)$. Nach 1.5 gilt in $H_1(X_2)$:

$$2.4.5 \quad \partial d_2 = \mu_2 = p \cdot m_2$$

D läßt sich demnach auch als ein Element $\bar{d}_2 \in H_2(M_2; \mathbb{Z}_p)$ auffassen. Weil sich λ_2 und $\mu_2 = \partial D$ in einem Punkt schneiden, gilt:

$$2.4.6 \quad \bar{\lambda}_2 \bullet \bar{d}_2 \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

Im Rest des Beweises werden die Bilder $\psi(\bar{f}_1)$ und $\psi(\bar{m}_1)$ berechnet. Aus Lemma 2.1 i) und der funktoriellen Eigenschaft der langen exakten Homologiesequenz, ergibt sich folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccc}
 2.4.7 & 0 \longrightarrow H_2(M_1, V_1) & \xrightarrow{\partial} H_1(V_1) \\
 & \downarrow \psi & \downarrow \psi' \\
 & 0 \longrightarrow H_2(M_2, X_2) & \xrightarrow{\partial} H_1(X_2)
 \end{array}$$

Dabei sei $\psi': V_1 \rightarrow X_2$ die Beschränkung von ψ auf V_1 und X_2 (siehe 2.4.1). Alle Gruppen in 2.4.7 sind unendlich zyklisch. Wegen $H_1(V_1) \approx \langle \lambda_1 | - \rangle$ und $H_1(X_2) \approx \langle m_2 | - \rangle$ gibt es eine Zahl $w \in \mathbb{Z}$ mit:

$$2.4.8 \quad \psi'(\lambda_1) = w \cdot m_2 \text{ (in } H_1(X_2))$$

w ist teilerfremd zu p , und somit invertierbar mod p , weil

$\psi: H_1(M_1) \rightarrow H_1(M_2)$ ein Isomorphismus ist, und $H_1(M_1) \approx \mathbb{Z}_p$ von λ_1 sowie $H_1(M_2) \approx \mathbb{Z}_p$ von m_2 erzeugt wird (siehe 1.6). Aus dem Diagramm 2.4.7 sowie den Formeln 2.4.3, 2.4.5 und 2.4.8 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \partial(\psi(f_1)) &= \psi'(\partial(f_1)) = \psi'(-p \cdot \lambda_1) = -p \cdot \psi'(\lambda_1) = -p w \cdot m_2 = -w p \cdot m_2 \\
 &= -w \cdot (\partial d_2) = \partial(-w \cdot d_2). \text{ Aus der Injektivität von } \partial \text{ folgt:}
 \end{aligned}$$

$$2.4.9 \quad \psi(f_1) = -w \cdot d_2 \text{ (in } H_2(M_2, X_2))$$

Aus der funktoriellen Eigenschaft der langen exakten Homologiesequenz sowie des universellen Koeffiziententheorems ergibt sich folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 2.4.10 & H_2(M_1; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\alpha} H_2(M_1, V_1; \mathbb{Z}_p) & \xleftarrow{\beta} H_2(M_1, V_1) \otimes \mathbb{Z}_p \\
 & \downarrow \psi & \downarrow \psi & \downarrow \psi \otimes \text{id} \\
 & H_2(M_2; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\alpha} H_2(M_2, X_2; \mathbb{Z}_p) & \xleftarrow{\beta} H_2(M_2, X_2) \otimes \mathbb{Z}_p
 \end{array}$$

α und β seien die Isomorphismen aus Lemma 2.2. Alle Gruppen aus 2.4.10 sind isomorph zu $\mathbb{Z}_p$. Nach Konstruktion von $f_1 \in H_2(M_1, V_1)$ und $\bar{f}_1 \in H_2(M_1; \mathbb{Z}_p)$ gilt: $\alpha(\bar{f}_1) = \beta(f_1 \otimes 1)$. Entsprechend gilt für $d_2 \in H_2(M_2, X_2)$ und $\bar{d}_2 \in H_2(M_2; \mathbb{Z}_p)$: $\alpha(\bar{d}_2) = \beta(d_2 \otimes 1)$. Aus 2.4.9 und 2.4.10 folgt damit: $(\beta^{-1} \circ \alpha)(\psi(\bar{f}_1)) = (\psi \otimes \text{id}) \circ (\beta^{-1} \circ \alpha)(\bar{f}_1)$
 $= (\psi \otimes \text{id})(f_1 \otimes 1) = \psi(f_1) \otimes 1 = (-w \cdot d_2) \otimes 1 = -w \cdot (d_2 \otimes 1)$
 $= -w \cdot (\beta^{-1} \circ \alpha)(\bar{d}_2) = (\beta^{-1} \circ \alpha)(-w \cdot \bar{d}_2)$. Aus der Injektivität von $\beta^{-1} \circ \alpha$ folgt:

$$2.4.11 \quad \psi(\bar{f}_1) = -w \cdot \bar{d}_2 \quad (\text{in } H_2(M_2; \mathbb{Z}_p))$$

Zur Berechnung von $\psi(\bar{m}_1)$ betrachte man folgendes kommutatives Diagramm:

$$2.4.12 \quad \begin{array}{ccccc} H_1(V_1) \otimes \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\alpha} & H_1(V_1; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\beta} & H_1(M_1; \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow \psi' \otimes \text{id} & & \downarrow \psi' & & \downarrow \psi \\ H_1(X_2) \otimes \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\alpha} & H_1(X_2; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\beta} & H_1(M_2; \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

α und β seien die Isomorphismen aus Lemma 2.3. β ist dabei von der Einbettung $V_1 \hookrightarrow M_1$ bzw. $X_2 \hookrightarrow M_2$ induziert. ψ' sei wieder die entsprechende Beschränkung von $\psi: M_1 \rightarrow M_2$. Alle Gruppen aus 2.4.12 sind isomorph zu $\mathbb{Z}_p$. Es seien $\bar{\lambda}_1$ und $\bar{m}_2$ die von λ_1 und m_2 repräsentierten Elemente aus $H_1(M_1; \mathbb{Z}_p)$ bzw. $H_1(M_2; \mathbb{Z}_p)$. Aus 1.6 folgt für $\lambda_1 \in H_1(V_1)$ und $m_2 \in H_1(X_2)$: $(\beta \circ \alpha)(\lambda_1 \otimes 1) = \bar{\lambda}_1 = r_1 \cdot \bar{m}_1$ bzw. $(\beta \circ \alpha)(m_2 \otimes 1) = \bar{m}_2 = q_2 \cdot \bar{\lambda}_2$, wobei $r_1 q_1 \equiv 1 \pmod{p}$ gilt. Damit folgt aus 2.4.12 und For-

mel 2.4.8: $\psi(r_1 \bar{m}_1) = \psi((\beta \bullet \alpha)(\lambda_1 \otimes 1)) = (\beta \bullet \alpha)((\psi' \otimes \text{id})(\lambda_1 \otimes 1))$
 $= (\beta \bullet \alpha)(\psi'(\lambda_1) \otimes 1) = (\beta \bullet \alpha)(w \cdot m_2 \otimes 1) = w \cdot (\beta \bullet \alpha)(m_2 \otimes 1) = w q_2 \cdot \bar{\lambda}_2$.
 Für $\psi(\bar{m}_1)$ ergibt sich wegen $r_1 q_1 \equiv 1 \pmod{p}$:

$$2.4.13 \quad \psi(\bar{m}_1) = w q_1 q_2 \bar{\lambda}_2 \quad (\text{in } H_1(M_2; \mathbb{Z}_p))$$

Aus der Schnittzahlinvarianz 2.4.2 sowie aus 2.4.4, 2.4.6, 2.4.11 und 2.4.13 folgt: $\pm 1 \equiv \bar{m}_1 \bullet \bar{f}_1 \equiv \pm \psi(\bar{m}_1) \bullet \psi(\bar{f}_1) \equiv \pm (w q_1 q_2 \bar{\lambda}_2) \bullet (-w \bar{d}_2)$
 $\equiv \pm w^2 q_1 q_2 (\bar{\lambda}_2 \bullet \bar{d}_2) \equiv \pm w^2 q_1 q_2 \pmod{p}$. Also gilt:

$$2.4.14 \quad w^2 q_1 q_2 \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

Da w invertierbar mod p ist, gilt: $q_1 q_2 \equiv \pm w^{-2} \pmod{p}$. $\square$

Mit Satz 2.4 lassen sich bereits bestimmte Mannigfaltigkeiten unterscheiden. So gilt z.B. für beliebige PL-Knoten k_1 und k_2 aus S^3 , daß $M_{5,1}(k_1)$ und $M_{5,2}(k_2)$ nicht homotopieäquivalent und somit nicht homöomorph sind.

Folgende detaillierte Fassung von Satz 2.4 wird in Kapitel 4 gebraucht:

2.5 KOROLLAR

Für zwei Surgery-Mannigfaltigkeiten $M_1 := M_{p,q_1}(k_1) = X_1 \cup_{\phi_1} V_1$ und $M_2 := M_{p,q_2}(k_2) = X_2 \cup_{\phi_2} V_2$ sei $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ eine Homotopieäquivalenz. Dann gibt es ein $v \in \mathbb{Z}$, $(v,p) = 1$, so daß gilt:

i) $\psi(t_1) = v \cdot t_2$ für $\psi: H_1(M_1) \rightarrow H_1(M_2)$, wobei $t_1 \in H_1(M_1)$ und

$t_2 \in H_1(M_2)$ von der Seele von V_1 bzw. von V_2 repräsentiert werden.

$$\text{ii) } q_2 \equiv \pm v^2 q_1 \pmod{p}.$$

BEWEIS

i) Nach 1.6 werden $H_1(M_1)$ und $H_1(M_2)$ von t_1 bzw. t_2 erzeugt. Weil $\psi: H_1(M_1) \rightarrow H_1(M_2)$ ein Isomorphismus zwischen zyklischen Gruppen der Ordnung p ist, ergibt sich die Existenz von v .

ii) Es muß v mit w aus Satz 2.4 verglichen werden. In $H_1(M_2)$ gilt wegen 1.6 und 2.4.8 einerseits: $\psi(\lambda_1) = w \cdot m_2$, andererseits:

$$\psi(\lambda_1) = \psi(t_1) = v \cdot t_2 = v \cdot \lambda_2 = v r_2 \cdot m_2. \text{ Daraus folgt:}$$

$$w \equiv v r_2 \pmod{p}. \text{ Aus 2.4.14 ergibt sich: } \pm 1 \equiv w^2 q_1 q_2 \equiv v^2 r_2^2 q_1 q_2 \pmod{p}.$$

$$\text{Wegen } r_2 q_2 \equiv 1 \pmod{p} \text{ gilt } q_2 \equiv \pm v^2 q_1 \pmod{p}. \quad \square$$

3. EINE ABBILDUNG VON BRODY

In [Bro] werden die Linsenräume $L_{p,q}$ erneut mit Hilfe einer Abbildung Δ^* bis auf Homöomorphie klassifiziert, diesmal ohne Verwendung der Hauptvermutung für dreidimensionale PL-Mannigfaltigkeiten. Δ^* ist eine Invariante für beliebige geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten. Grob gesprochen wird dabei aus jeder Homologiekategorie ein repräsentierender PL-Knoten genommen und dessen Alexanderpolynom "eingebettet". Die Idee, zwei Mannigfaltigkeiten durch ihre "Knotentheorie" zu unterscheiden, geht auf R.H. Fox zurück.

3.1 Für eine Gruppe G mit einer endlichen Beschreibung

$\langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$ ist das Alexanderpolynom Δ_G folgendermaßen definiert (siehe [F], [C-F] und [Bro]): Aus $\langle x_i | r_j \rangle$ wird mittels der freien Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die Jacobi-Matrix $v(\partial r_j | \partial x_i)$ mit Eintragungen aus dem Gruppenring $\mathbb{Z}G$ errechnet, wobei v die kanonische Abbildung $\langle x_i | \rightarrow G$ sei. Durch Anwendung der kanonischen Abbildung: $G \twoheadrightarrow B$, mit B als Bettigruppe von G , d.h. der abelsch und torsionsfrei gemachten Gruppe, wird die Jacobi-Matrix in die Alexander-Matrix überführt. Δ_G ist nach Definition der größte gemeinsame Teiler aller $(n-1) \times (n-1)$ -Unterdeterminanten der Alexandermatrix. Δ_G ist somit ein Element aus dem Gruppenring $\mathbb{Z}B$ und bis auf triviale Einheiten eindeutig definiert. Δ_G hängt nur von der Gruppe G , aber nicht der speziellen Beschreibung von G ab. Es gilt folgende Invarianzeigenschaft (siehe [C-F] S. 120):

3.1.1 Sei $\psi: G \rightarrow G'$ ein Isomorphismus. Dann gilt für den induzierten

$$\text{Isomorphismus } \psi: B \rightarrow B': \psi(\Delta_G) = \Delta_{G'}.$$

Für einen PL-Knoten κ aus einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit M ist das Alexanderpolynom Δ_κ als Alexanderpolynom der Gruppe $\pi_1(M \setminus \kappa)$ definiert. Die Bettigruppe von $\pi_1(M \setminus \kappa)$ wird im folgenden mit $B_1(M \setminus \kappa)$ bezeichnet. Falls $B_1(M \setminus \kappa)$ eine von t erzeugte zyklische Gruppe ist, wird Δ_κ auch als Polynom $\Delta_\kappa(t)$ in der Variablen t geschrieben. Speziell gilt für einen Knoten $\kappa \hookrightarrow S^3$: $H_1(S^3 \setminus \kappa) = B_1(S^3 \setminus \kappa) \approx \langle t | - \rangle$. Für das Alexanderpolynom von κ gilt in diesem Fall (siehe [C-F] S. 134):

$$3.1.2 \quad \Delta_\kappa(1) = \pm 1, \Delta_\kappa(t^{-1}) = \Delta_\kappa(t) \quad (\kappa \hookrightarrow S^3).$$

Folgendes Lemma erleichtert die Berechnung des Alexanderpolynoms. Es ist aus [Bro]; S. 164, in vereinfachter Form übernommen:

3.2 LEMMA (BRODY)

Für G sei $\langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$ eine Gruppenbeschreibung mit deficiency 1, d.h. mit einer Erzeugenden mehr als Relationen. Für die Bettigruppe B von G gelte: $B \approx \langle t | - \rangle$. Daraus folgt:

$$v(x_j - 1)\Delta_G(t) = (t-1)\Delta^{(j)} \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Dabei sei $\Delta^{(j)}$ diejenige Unterdeterminante der Alexandermatrix, welche durch Streichung der j -ten Spalte entsteht und v die zusammengesetzte kanonische Abbildung $\langle x_i | - \rangle \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow B$. $\square$

Zur Definition der Abbildung Δ^* betrachte man folgende Situation: Für einen PL-Knoten κ in einer geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit sei $i: M \setminus \kappa \rightarrow M$ die entsprechende Einbettung. Folgendes Diagramm läßt sich trivialerweise durch eine Abbildung $*$ kommutativ ergänzen:

$$\begin{array}{ccc}
 3.3 & \pi_1(M \setminus \kappa) \xrightarrow{i} \pi_1(M) & \text{Dabei sei } D_1(M \setminus \kappa) := H_1(M)/i(T_1(M \setminus \kappa)) \\
 & \downarrow \qquad \qquad \downarrow & \text{und } T_1(M \setminus \kappa) \text{ die Torsionsuntergruppe} \\
 & H_1(M \setminus \kappa) \xrightarrow{i} H_1(M) & \text{von } H_1(M \setminus \kappa). \\
 & \downarrow \qquad \qquad \downarrow & \\
 & B_1(M \setminus \kappa) \xrightarrow{*} D_1(M \setminus \kappa) &
 \end{array}$$

Durch $*$ wird ein Ringhomomorphismus $*$: $\mathbb{Z}B_1(M \setminus \kappa) \rightarrow \mathbb{Z}D_1(M \setminus \kappa)$ induziert, welcher Anlass zu folgender Definition gibt (siehe [Bro] S. 176).

3.4 DEFINITION

Sei κ ein PL-Knoten in einer geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit M mit Alexanderpolynom $\Delta_\kappa \in \mathbb{Z}B_1(M \setminus \kappa)$. Dann sei $\Delta_\kappa^* := *(\Delta_\kappa)$.

3.5 SATZ (BRODY)

In einer geschlossenen orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit M seien κ_1 und κ_2 PL-Knoten bezüglich zweier nicht notwendig gleicher PL-Strukturen von M . Aus $\kappa_1 \sim \kappa_2$ (in M) folgt: $H_1(M \setminus \kappa_1) \approx H_1(M \setminus \kappa_2)$ sowie $i(T_1(M \setminus \kappa_1)) = i(T_1(M \setminus \kappa_2))$, d.h. $D_1(M \setminus \kappa_1) = D_1(M \setminus \kappa_2)$ und es gilt: $\Delta_{\kappa_1}^* = \Delta_{\kappa_2}^*$. $\square$

BEMERKUNG

Im Beweis dieses Satzes in [Bro] (siehe Theorem 3.1 und 3.2) wird benutzt auf die Anwendung der in [Moi] bewiesenen Hauptvermutung (3-Man-

nigfaltigkeiten besitzen im wesentlichen nur eine PL-Struktur) verzichtet.

Δ_{κ}^* hängt nach Satz 3.5 nur von der von κ repräsentierten Homologiekategorie aus $H_1(M)$ ab, welche ebenfalls mit κ bezeichnet wird, und definiert somit eine Abbildung $\Delta^*: H_1(M) \rightarrow \bigcup_{\kappa \in H_1(M)} \mathbb{Z}D_1(M\backslash\kappa)$. Genau genommen werden dabei die Elemente aus $\mathbb{Z}D_1(M\backslash\kappa)$ bis auf triviale Einheiten identifiziert. Falls $D_1(M\backslash\kappa)$ eine von t erzeugte zyklische Gruppe endlicher oder unendlicher Ordnung ist, wird Δ_{κ}^* auch als Polynom $\Delta_{\kappa}^*(t)$ beschrieben, wobei gegebenenfalls $\text{mod } t^p - 1$ ($p := \text{ord } t$) gerechnet wird. Als Homöomorphieinvariante für 3-Mannigfaltigkeiten läßt sich Δ^* im Sinne folgender natürlicher Eigenschaft verwenden. Diese ist in [Bro] nicht explizit aufgeführt und wird deshalb hier bewiesen:

3.6 LEMMA

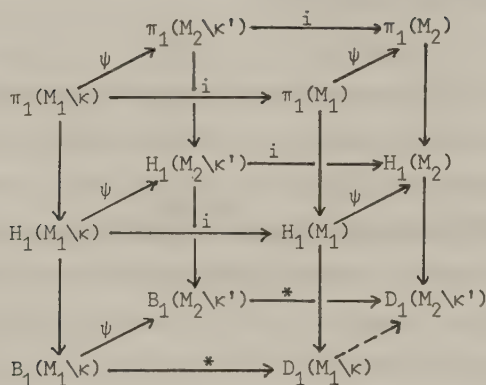
Für zwei geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 sei $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ ein Homöomorphismus. Es folgt: Für alle $\kappa \in H_1(M_1)$ induziert der Isomorphismus $\psi: H_1(M_1) \rightarrow H_1(M_2)$ einen gleichbenannten Ringisomorphismus $\psi: \mathbb{Z}D_1(M_1\backslash\kappa) \rightarrow \mathbb{Z}D_1(M_2\backslash\psi(\kappa))$ mit $\psi(\Delta_{\kappa}^*) = \Delta_{\psi(\kappa)}^*$

BEWEIS

Für einen PL-Knoten $\kappa \hookrightarrow M_1$ gilt, daß $\kappa' := \psi(\kappa)$ ein PL-Knoten in M_2 bezüglich der vom Homöomorphismus ψ übertragenen PL-Struktur ist. Die Einbettungen $i: M_1\backslash\kappa \rightarrow M_1$ und $i: M_2\backslash\kappa' \rightarrow M_2$ sowie die Homöomorphismen $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ und $\psi: M_1\backslash\kappa \rightarrow M_2\backslash\kappa'$ induzieren gemäß 3.3 folgendes kommu-

tatives Diagramm:

3.6.1



Dabei sind alle ψ 's Isomorphismen. Für $\psi: H_1(M_1) \rightarrow H_1(M_2)$ gilt:

$\psi(i(T_1(M_1 \setminus \kappa))) = i(\psi(T_1(M_1 \setminus \kappa))) = i(T_1(M_2 \setminus \kappa'))$. Daraus folgt, daß es einen induzierten Isomorphismus $\psi: D_1(M_1 \setminus \kappa) \rightarrow D_1(M_2 \setminus \kappa')$ gibt, welcher 3.6.1 an der gestrichelten Stelle ergänzt. Die Kommutativität des unten liegenden Quadrats ergibt sich durch Vorschalten der surjektiven Abbildung $H_1(M_1 \setminus \kappa) \rightarrow B_1(M_1 \setminus \kappa)$ aus der Kommutativität der übrigen Diagrammteile. Daraus resultiert die Kommutativität von:

3.6.2

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}B_1(M_2 \setminus \kappa') & \xrightarrow{*} & \mathbb{Z}D_1(M_2 \setminus \kappa') \\ \uparrow \psi & & \uparrow \psi \\ \mathbb{Z}B_1(M_1 \setminus \kappa) & \xrightarrow{*} & \mathbb{Z}D_1(M_1 \setminus \kappa) \end{array}$$

Aus der Invarianzeigenschaft 3.1.1 von Alexanderpolynomen folgt:

$\psi(\Delta_\kappa) = \Delta_{\kappa'} = \Delta_{\psi(\kappa)}$. Aus Definition 3.4 und Diagramm 3.6.2 ergibt sich damit: $\psi(\Delta_\kappa^*) = \psi(*(\Delta_\kappa)) = *(\psi(\Delta_\kappa)) = *(\Delta_{\psi(\kappa)}) = \Delta_{\psi(\kappa)}^*$. $\square$

4. HOMÖOMORPHIE

Für eine Surgery-Mannigfaltigkeit $M := M_{p,q}(k) = X \cup_{\varphi} V$ bezüglich eines PL-Knotens $k \hookrightarrow S^3$, soll die Abbildung Δ^* aus Kapitel 3 berechnet werden. Daraus ergeben sich notwendige Bedingungen für die Homöomorphie zweier Surgery-Mannigfaltigkeiten. Im folgenden werden wieder die Bezeichnungen aus Definition 1.3 fest übernommen. Es gelte folgende Konvention:

BEMERKUNG

Gleichungen in Gruppenringen sollen nur bis auf triviale Einheiten (das sind für einen Gruppenring $\mathbb{Z}G$ die Elemente $\pm g$, $g \in G$) gelten.

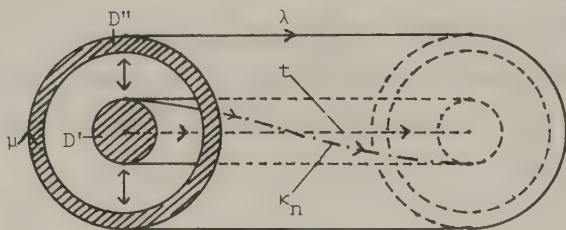
Für jede Homologieklassse t^n aus $H_1(M) \approx \langle t | t^p = 1 \rangle$, wobei t der Seele von V entspricht (siehe 1.6), wird ein repräsentierender Knoten κ_n definiert. κ_n liegt dabei im Inneren von $V = D^2 \times S^1$ auf der Torusfläche $\partial(D' \times S^1)$, mit $D' := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$.

4.1 DEFINITION

Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $\kappa_n \hookrightarrow \partial(D' \times S^1)$ ein PL-Knoten, welcher in $\pi_1(\partial(D' \times S^1)) \approx \langle \mu, \lambda \mid [\mu, \lambda] = 1 \rangle$ die Klasse $\mu \lambda^n$ repräsentiert. Zur Existenz von κ_n siehe [Ro] S. 19. κ_n ist somit ein PL-Knoten in M und repräsentiert in $H_1(M) \approx \langle t \mid t^p = 1 \rangle$ nach 1.6 die Klasse t^n .

In der folgenden Skizze sei $V = D^2 \times S^1$ an der Meridianfläche D^2 und der Torusfläche $\partial(D' \times S^1)$ aufgeschnitten:

4.1.1 Skizze



Für den Knotenaußenraum X von k sei $\langle x_i | r_j \rangle$ eine Wirtingerbeschreibung von $\pi_1(X)$ (siehe [C-F] S. 86). Es gilt:

4.1.2 Der Abbildung $\pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ entspricht: $\langle x_i | r_j \rangle \rightarrow \langle m | - \rangle$
mit $x_i \mapsto m$, $m \mapsto m$, $1 \mapsto 1$.

Die nächsten beiden Lemmata berechnen das Diagramm 3.3 für die Einbettung $i: M \setminus K_n \rightarrow M$. Um eine Fallunterscheidung zu vermeiden, welche keine besseren Ergebnisse bringen würde, soll der Fall $n = 0 = p$ ausgeschlossen werden.

4.2 LEMMA

Dem Diagramm $\pi_1(M \setminus K_n) \xrightarrow{i} \pi_1(M) \rightarrow H_1(M)$ entspricht:

$\langle x_i, u | r_j, u^n = m^{p+rn} \cdot l^{q+sn} \rangle \xrightarrow{i} \langle x_i | r_j, m^p l^q \rangle \rightarrow \langle t | t^p = 1 \rangle$ mit
 $x_i \mapsto x_i$, $u \mapsto m^r l^s$ bzw. $x_i \mapsto t^q$, $m \mapsto t^q$, $1 \mapsto 1$. Dabei gilt
 $ps - rq = -1$.

BEWEIS

$\pi_1(M)$ läßt sich nach dem Seifert-van-Kampen-Satz aus der Zerlegung $M = X \cup V$ berechnen. Für die Klebeabbildung $\varphi: \partial V \rightarrow \partial X$ gilt nach Definition 1.3: $\mu \mapsto m^{p_1 q_1}, \lambda \mapsto m^{r_1 s_1}$ mit $p_1 s_1 - r_1 q_1 = -1$. Daraus folgt:

$\pi_1(M) \approx \langle x_i, \mu, \lambda | r_j, \mu = 1, \mu = m^{p_1 q_1}, \lambda = m^{r_1 s_1} \rangle \approx \langle x_i | r_j, m^{p_1 q_1} \rangle$. Die Aussagen über die Abbildung $\pi_1(M) \rightarrow H_1(M)$ ergeben sich unmittelbar

aus 4.1.2 sowie 1.5 und 1.6. Zur Berechnung von $\pi_1(M \setminus \kappa_n)$ betrachte man die Zerlegung $V = (D' \times S^1) \cup (D'' \times S^1)$ mit $D'' := D^2 \setminus \dot{D}'$ (siehe Skizze 4.1.1). Es gilt $\pi_1(D'' \times S^1) \approx \langle \mu, \lambda | [\mu, \lambda] \rangle$ und

$\pi_1(D' \times S^1) \approx \langle u | - \rangle$, wobei u von der Seele vom Volltorus $D' \times S^1$ repräsentiert wird. Durch Verklebung von $D' \times S^1$ und $D'' \times S^1$ längs der Ringfläche $F := (\partial D' \times S^1) \setminus \kappa_n$ erhält man $V \setminus \kappa_n$. Eine Erzeugende der zyklischen Gruppe $\pi_1(F)$ wird dabei mit u^n bzw. $\mu \lambda^n$ identifiziert. Es folgt: $\pi_1(V \setminus \kappa_n) \approx \langle u, \mu, \lambda | [\mu, \lambda], u^n = \mu \lambda^n \rangle$, wobei in $\pi_1(V)$ gilt: $u = \lambda$.

Aus der Zerlegung $M \setminus \kappa_n = X \cup_\varphi (V \setminus \kappa_n)$ folgt:

$\pi_1(M \setminus \kappa_n) \approx \langle x_i, u, \mu, \lambda | r_j, [\mu, \lambda], u^n = \mu \lambda^n, \mu = m^{p_1 q_1}, \lambda = m^{r_1 s_1} \rangle$
 $\approx \langle x_i, u | r_j, u^n = m^{p_1 + r n_1 q_1 + s n_1} \rangle$. Bei der letzten Umformung wurde verwandt, daß der Kommutator $[m, l]$ wegen $\pi_1(\partial X) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ eine Folgerelation der Relationen r_j ist. Bei der Einbettung $i: M \setminus \kappa_n \rightarrow M$ wird u mit $\lambda = m^{r_1 s_1}$ identifiziert. $\square$

4.3 LEMMA

Für $\kappa_n \hookrightarrow M = M_{p,q}(k)$ sei $d := (n, p)$, $\bar{n} := (\frac{n}{d})^{-1} \pmod{\frac{p}{d}}$; dabei ist $n \neq 0$ vorausgesetzt, falls $p = 0$. Es gilt:

i) Der kanonischen Projektion $\pi_1(M\backslash\kappa_n) \twoheadrightarrow B_1(M\backslash\kappa_n)$ entspricht:
 $\langle x_i, u | r_j, u^n = m^{p+rn_1q+sn} \rangle \longrightarrow \langle \tilde{t} | - \rangle$ mit $x_i \mapsto \tilde{t}^{\frac{p+rn}{d}}$, $u \mapsto \tilde{t}^{\frac{p+rn}{d}}$ und
 $ps - rq = -1$.

ii) Der Abbildung $*$: $B_1(M\backslash\kappa_n) \rightarrow D_1(M\backslash\kappa_n)$ entspricht:
 $*$: $\langle \tilde{t} | - \rangle \rightarrow \langle t | t^{\frac{p}{d}} = 1 \rangle$ mit $\tilde{t} \mapsto t^{\frac{p}{d}}$

BEWEIS

i) Nach Lemma 4.2 gilt: $\pi_1(M\backslash\kappa_n) \approx \langle x_i, u | r_j, u^n = m^{p+rn_1q+sn} \rangle$. Durch
 Abelschmachten ergibt sich wegen 4.1.2: $H_1(M\backslash\kappa_n) \approx \langle m, u | n \cdot u - (p+rn) \cdot m = 0 \rangle$.
 Für $d = (n, p) = (n, p+rn)$ gilt:

4.3.1 Es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha n + \beta(p+rn) = d$.

In $H_1(M\backslash\kappa_n)$ soll der Erzeugendenwechsel $\tilde{t} := \alpha \cdot m + \beta \cdot u$ und
 $t' := -\frac{p+rn}{d} \cdot m + \frac{n}{d} \cdot u$ vorgenommen werden. Es folgt: $d \cdot t' = 0$ sowie
 $m = \frac{n}{d} \cdot \tilde{t} - \beta t'$ und $u = \frac{p+rn}{d} \cdot \tilde{t} + \alpha t'$. Daraus ergibt sich:
 $H_1(M\backslash\kappa_n) \approx \langle \tilde{t}, t' | [\tilde{t}, t'] = 1, t'^d = 1 \rangle \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_d$. Für die Projektion
 $\pi_1(M\backslash\kappa_n) \twoheadrightarrow H_1(M\backslash\kappa_n)$ folgt:

4.3.2 $x_i \mapsto \tilde{t}^{\frac{n}{d}} t'^{-\beta}$, $u \mapsto \tilde{t}^{\frac{p+rn}{d}} t'^{\alpha}$

4.3.3 $x_i^{\alpha} u^{\beta} \mapsto \tilde{t}$, $x_i^{-\frac{p+rn}{d}} u^{\frac{n}{d}} \mapsto t'$

Wegen $d \neq 0$ gilt: $T_1(M\backslash\kappa_n)$ wird von t' erzeugt und $B_1(M\backslash\kappa_n) \approx \langle \tilde{t} | - \rangle$.
 Die Aussage über die Projektion $\pi_1(M\backslash\kappa_n) \twoheadrightarrow B_1(M\backslash\kappa_n)$ folgt unmittelbar
 aus 4.3.2.

ii) Man betrachte folgendes kommutatives Teildiagramm von 3.3:

$$\begin{array}{ccc}
 4.3.4 & \pi_1(M \setminus \kappa_n) & \xrightarrow{i} \pi_1(M) \\
 & \downarrow \tau & \downarrow \tau \\
 & H_1(M \setminus \kappa_n) & \xrightarrow{i} H_1(M)
 \end{array}$$

Aus Lemma 4.2 und 4.3.3 folgt für $t' \in H_1(M \setminus \kappa_n)$:

$$\begin{aligned}
 i(t') &= i(\tau(x_1^{-\frac{p+rn}{d}} u^{\frac{n}{d}})) = \tau(i(x_1^{-\frac{p+rn}{d}} u^{\frac{n}{d}})) = \tau(x_1^{-\frac{p+rn}{d}} (m r_1 s)^{\frac{n}{d}}) \\
 &= t^{-q \cdot \frac{p+rn}{d}} t^{q \cdot r \cdot \frac{n}{d}} = t^{-q \cdot \frac{p}{d}} \Rightarrow i(T_1(M \setminus \kappa_n)) \text{ wird in } H_1(M) \text{ von } t^{-q \cdot \frac{p}{d}} \text{ er-}
 \end{aligned}$$

zeugt, also auch von $t^{\frac{p}{d}}$, wegen $(p, q) = 1$. Demnach gilt:

$$D_1(M \setminus \kappa_n) = H_1(M) / i(T_1(M \setminus \kappa_n)) \approx \langle t | t^{\frac{p}{d}} = 1 \rangle.$$

Die Erzeugende von $D_1(M \setminus \kappa_n)$ wird ebenfalls mit t bezeichnet. Für

$\tilde{t} \in H_1(M \setminus \kappa_n)$ folgt aus dem Diagramm 4.3.4 sowie aus Lemma 4.2 und 4.3.3:

$$i(\tilde{t}) = i(\tau(x_1^{\alpha} u^{\beta})) = \tau(i(x_1^{\alpha} u^{\beta})) = \tau(x_1^{\alpha} (m r_1 s)^{\beta}) = t^{q\alpha} t^{qr\beta} = t^{q(\alpha+r\beta)}.$$

Für die Abbildung $*$: $B_1(M \setminus \kappa_n) \rightarrow D_1(M \setminus \kappa_n)$ folgt daraus: $*(\tilde{t}) = t^{q(\alpha+r\beta)}$

mit $\tilde{t} \in B_1(M \setminus \kappa_n)$. Aus $\alpha n + \beta(p+rn) = d$ (siehe 4.3.1) folgt:

$$(\alpha + r\beta) \frac{n}{d} + \beta \frac{n}{d} = 1 \text{ d.h. } (\alpha + r\beta) \equiv \left(\frac{n}{d}\right)^{-1} \equiv \bar{n} \pmod{\frac{p}{d}}. \text{ Für}$$

$$\tilde{t} \in B_1(M \setminus \kappa_n) \text{ ergibt sich daraus } *(\tilde{t}) = t^{q\bar{n}}. \quad \square$$

Lemma 4.2 und 4.3 ermöglichen die Berechnung der Abbildung Δ^* . Vorweg eine Definition:

4.4 DEFINITION

Für $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sei folgendes Polynom aus $\mathbb{Z}[t] \rightarrow$ definiert:

$$P_{(a,b)}(t) := \frac{\frac{ab}{d} - 1}{\frac{a}{d} - 1} \cdot \frac{(t-1)}{\frac{b}{d} - 1}, \quad d := (a, b)$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß $P_{(a,b)}(t)$ wohldefiniert ist. Falls $(a, b) = 1$ gilt, handelt es sich um das Alexanderpolynom eines Torusknotens. Es gilt:

$$4.4.1 \quad P_{(a,b)}(1) = d, \quad d = (a, b)$$

Zum Beweis: Aus der Definition folgt: $\frac{(t^{\frac{b}{d}} - 1)}{(t - 1)} P_{(a,b)}(t) = \frac{(t^{\frac{ab}{d}} - 1)}{(t^{\frac{a}{d}} - 1)}$

$$\Rightarrow (1 + t + \dots + t^{\frac{b}{d} - 1}) \cdot P_{(a,b)}(t) = (1 + t^{\frac{a}{d}} + \dots + t^{\frac{a}{d} \cdot (b-1)}).$$

Für $t = 1$ ergibt sich: $\frac{b}{d} \cdot P_{(a,b)}(1) = b \Rightarrow P_{(a,b)}(1) = d \quad \square$

4.5 LEMMA

Für $\kappa_n \hookrightarrow M := M_{p,q}(k) = X \cup_{\varphi} V$ gilt (es sei $n \neq 0$ falls $p = 0$):

$$\Delta_{\kappa_n}^*(t) \equiv P_{(n, p+rn)}(t^{\bar{n}}) \cdot \Delta_K(t^q) \mod t^{\frac{p}{d}} - 1 \text{ mit}$$

$d = (n, p)$, $\bar{n} \equiv (\frac{n}{d})^{-1} \mod \frac{p}{d}$, $r \equiv q^{-1} \mod p$ und $\Delta_K(t)$ als Alexanderpolynom von $k \hookrightarrow S^3$.

BEWEIS

$\langle x_1, \dots, x_{i+1} | r_1, \dots, r_i \rangle$ sei eine Wirtingerbeschreibung von $\pi_1(X)$ mit

deficiency 1 (siehe [C-F] S. 86). Für die zusammengesetzte kanonische

Abbildung $v_1: \langle x_1, \dots, x_{i+1} | \rightarrow \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow B_1(X)$ gilt nach 4.1.2:

$B_1(X) \approx \langle m | \rightarrow$ und $v_1(x_1) = \dots = v_1(x_{i+1}) = m$. Nach Lemma 4.2 ist

$\langle x_1, \dots, x_{i+1}, u | r_1, \dots, r_i, u^n = m^{p+rn_1q+sn} \rangle$ eine Beschreibung von

$\pi_1(M\backslash K_n)$. Für die zusammengesetzte kanonische Abbildung

$v: \langle x_1, \dots, x_{i+1}, u | \rightarrow \rightarrow \pi_1(M\backslash K_n) \rightarrow B_1(M\backslash K_n)$ gilt nach Lemma 4.3 i):

$B_1(M\backslash K_n) \approx \langle \tilde{t} | \rightarrow$ und $v(x_1) = \dots = v(x_{i+1}) = \tilde{t}^{\frac{n}{d}}$ sowie $v(u) = \tilde{t}^{\frac{p+rn}{d}}$.

Die Beschränkung von v auf $\langle x_1, \dots, x_{i+1} | \rightarrow$ läßt sich über $B_1(X)$ fak-

torisieren, d.h. $v = v_2 \circ v_1$, wobei v_2 die Abbildung $\langle m | \rightarrow \rightarrow \langle \tilde{t} | \rightarrow$ mit

$v_2(m) = \tilde{t}^{\frac{n}{d}}$ ist. Aus der Gruppenbeschreibung von $\pi_1(M\backslash K_n)$ ergibt sich

für die Jacobi-Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial x_i} & \frac{\partial r_1}{\partial x_{i+1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial r_i}{\partial x_i} & \frac{\partial r_i}{\partial x_{i+1}} & 0 \\ * & \dots & * & * & \frac{u^n - 1}{u - 1} \end{pmatrix}$$

In der letzten Spalte stehen

die Ableitungen nach u. Die

Eintragungen unter * ... *

spielen für das Folgende keine

Rolle.

Dabei gilt $\frac{\partial r_1}{\partial u} = \dots = \frac{\partial r_i}{\partial u} = 0$, weil in den Wörtern $r_1, \dots, r_i$ die

Erzeugende u nicht auftritt. Entsprechend gilt:

$\frac{\partial}{\partial u} (u^n m^{-p-rn_1q-sn}) = \frac{\partial}{\partial u} (u^n) = \frac{u^n - 1}{u - 1}$. Folgende Untermatrizen von A wer-

den benötigt:

R entstehe aus A durch Streichung der vorletzten Spalte und ist so-

mit eine $(i+1) \times (i+1)$ -Matrix.

$\tilde{A}$ entstehe aus A durch Streichung der letzten Zeile, sowie der letzten

Spalte und ist somit eine $i \times (i+1)$ -Matrix. Dabei handelt es sich um die Jacobi-Matrix von $\pi_1(X)$.

$\tilde{R}$ entstehe aus A durch Streichung der letzten Zeile sowie der beiden letzten Spalten und ist damit eine $i \times i$ -Matrix. Durch Anwendung von 3.2 auf die Alexandermatrix $\tilde{A}$ von $\pi_1(X)$ ergibt sich für das Alexanderpolynom von $k \hookrightarrow S^3$: $v_1(x_{i+1}-1) \Delta_k(m) = (m-1) \det(v_1 \tilde{R})$. Wegen $v_1(x_{i+1}-1) = m-1$ folgt aus der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}[m] \rightarrow$:

$$4.5.1 \quad \Delta_k(m) = \det(v_1 \tilde{R})$$

Für das Alexanderpolynom von $\kappa_n \hookrightarrow M$ ergibt die Anwendung von 3.2 auf vA :

$$4.5.2 \quad v(x_{i+1}-1) \Delta_{\kappa_n}(\tilde{t}) = (\tilde{t}-1) \det(vR)$$

Durch Entwicklung nach der letzten Spalte ergibt sich für die Determinante von vR : $\det(vR) = v \left(\frac{u^n-1}{u-1} \right) \cdot \det(v\tilde{R})$. Wegen 4.5.1 gilt: $\det(v\tilde{R}) = \det(v_2 v_1 \tilde{R}) = v_2 (\det(v_1 \tilde{R})) = v_2 (\Delta_k(m)) = \Delta_k(\tilde{t}^{\frac{n}{d}})$. Aus 4.5.2 folgt damit:

$$\left(\tilde{t}^{\frac{n}{d}} - 1 \right) \cdot \Delta_{\kappa_n}(\tilde{t}) = (\tilde{t}-1) \frac{\tilde{t}^{\frac{n(p+rn)}{d}} - 1}{\tilde{t}^{\frac{p+rn}{d}} - 1} \cdot \Delta_k(\tilde{t}^{\frac{n}{d}}).$$

Weil $\mathbb{Z}[\tilde{t}] \rightarrow$ ein faktorieller Ring ist, folgt:

$$\Delta_{\kappa_n}(\tilde{t}) = P_{(n,p+rn)}(\tilde{t}) \cdot \Delta_k(\tilde{t}^{\frac{n}{d}}).$$

Durch Anwendung der Abbildung $*$: $\langle \tilde{t} | \rightarrow \rightarrow \langle t | t^{\frac{p}{d}} = 1 \rangle$ mit $*(\tilde{t}) = t^{\frac{n}{d}}$ (siehe Lemma 4.3 ii) ergibt sich daraus wegen $qn \cdot \frac{n}{d} \equiv q \pmod{\frac{p}{d}}$ die Behauptung. $\square$

Aus der Natürlichkeitseigenschaft 3.6 von Δ^* lassen sich folgende Bedingungen für die Homöomorphie zweier Surgery-Mannigfaltigkeiten ableiten:

4.6 SATZ

Es sei $M_{p,q_1}(k_1) \approx M_{p,q_2}(k_2)$. Daraus folgt: $\exists v \in \mathbb{Z}$, $(v,p) = 1$, mit:

$$i) \quad q_2 \equiv \pm v^2 q_1 \pmod{p}$$

ii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt (der Fall $n = p = 0$ sei ausgenommen):

$$P_{(n,p+r_1n)}(t^{vq_1\bar{n}}) \Delta_{k_1}(t^{vq_1}) \equiv P_{(vn,p+r_2vn)}(t^{q_2\bar{vn}}) \Delta_{k_2}(t^{q_2}) \pmod{t^{\frac{p}{d}-1}}$$

wobei $d = (n,p) = (vn,p)$, $r_1 \equiv q_1^{-1}$ und $r_2 \equiv q_2^{-1} \pmod{p}$, $\bar{n} \equiv (\frac{n}{d})^{-1}$ und $\bar{vn} \equiv (\frac{vn}{d})^{-1} \pmod{\frac{p}{d}}$ gilt. $\Delta_{k_1}(t)$ und $\Delta_{k_2}(t)$ sind dabei die Alexanderpolynome der Knoten k_1 und k_2 aus S^3 .

BEWEIS

i) Für $M_1 := M_{p,q_1}(k_1) = X_1 \cup_{\varphi_1} V_1$ und $M_2 := M_{p,q_2}(k_2) = X_2 \cup_{\varphi_2} V_2$ gilt nach 1.6: $H_1(M_1) \approx H_1(M_2) \approx \langle t | t^p = 1 \rangle$, wobei t der Seele von V_1 bzw. von V_2 entspricht. Sei $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ ein Homöomorphismus. Für den induzierten Isomorphismus $\psi: H_1(M_1) \rightarrow H_1(M_2)$ gilt: Es gibt $v \in \mathbb{Z}$, $(v,p) = 1$ mit $\psi(t) = t^v$. Die Aussage i) folgt dann direkt aus Korollar 2.5.

ii) Für $n \in \mathbb{Z}$ (der Fall $n = p = 0$ sei dabei ausgenommen) repräsentiert der Knoten $\kappa_n \hookrightarrow M_1$ in $H_1(M_1)$ die Klasse t^n . $\psi(t^n)$ wird in $H_1(M_2)$ von $\psi(\kappa_n)$ und wegen $\psi(t^n) = t^{vn}$ auch von $\kappa_{vn} \hookrightarrow M_2$ repräsentiert. Nach Satz 3.5 gilt: $D_1(M_2 \setminus \psi(\kappa_n)) = D_1(M_2 \setminus \kappa_{vn})$ und $\Delta_{\psi(\kappa_n)}^* = \Delta_{\kappa_{vn}}^*$. Nach

Lemma 3.6 gilt für den induzierten Isomorphismus

$$\psi: \mathbb{Z}D_1(M_1 \setminus \kappa_n) \rightarrow \mathbb{Z}D_1(M_2 \setminus \kappa_{vn}):$$

$$4.6.1 \quad \psi(\Delta_{\kappa_n}^*) = \Delta_{\psi(\kappa_n)}^* = \Delta_{\kappa_{vn}}^*$$

Da nach Lemma 4.3 i) $D_1(M_1 \setminus \kappa_n)$ und $D_1(M_2 \setminus \kappa_{vn})$ isomorph zu $\langle t | t^{\frac{p}{d}} = 1 \rangle$ mit $d = (n, p) = (vn, p)$ sind, entspricht der induzierte Isomorphismus ψ gemäß Lemma 3.6 der Substitution: $t \mapsto t^v$. Aus der Gleichung 4.6.1 und Lemma 4.5 folgt daraus die Behauptung. $\square$

Die Homöomorphiebedingungen aus Satz 4.6 lassen sich vereinfachen, und zwar äquivalent. Es ist sinnvoll, die Fälle $p = 0$ und $p \geq 1$ getrennt zu behandeln.

4.7 SATZ

$M_{0,1}(k_1) \approx M_{0,1}(k_2) \Rightarrow \Delta_{k_1}(t) = \Delta_{k_2}(t)$. $\Delta_{k_1}(t)$ und $\Delta_{k_2}(t)$ seien dabei die Alexanderpolynome der Knoten $k_1 \longleftrightarrow S^3$ bzw. $k_2 \longleftrightarrow S^3$. Speziell gilt: $M_{0,1}(k) \approx S^2 \times S^1 \Rightarrow \Delta_k(t) = 1$.

BEWEIS

Wegen $p = 0$, $q_1 = q_2 = 1$ gilt für die entsprechenden Größen aus Satz 4.6: $r_1 = r_2 = 1$, $n \neq 0$, $d = \pm n$, $v = \pm 1$, $\bar{n} = \pm 1$, $\bar{v}\bar{n} = \pm 1$. Für die Polynome $P_{(n,p+r_j,n)}(t)$, $j = 1, 2$, ergibt sich unmittelbar aus Definition 4.4: $P_{(n,p+r_j,n)}(t) = \frac{t^n - 1}{t - 1}$, $\forall n \neq 0$. Deshalb sind die Bedingungen aus Satz 4.6 äquivalent zu:

$$4.7.1 \quad \forall n \neq 0 \text{ gilt: } \frac{t^{n-1}}{t-1} \Delta_{K_1}(t^{\pm 1}) = \frac{t^{n-1}}{t-1} \Delta_{K_2}(t^{\pm 1}).$$

Wegen 3.1.2 und der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}\langle t \rangle \rightarrow$ ist 4.7.1 äquivalent zu: $\Delta_{K_1}(t) = \Delta_{K_2}(t)$.

Falls K dem trivialen Knoten gleich ist, gilt: $M_{0,1}(K) \approx S^2 \times S^1$ und $\Delta_K(t) = 1$. Damit ergibt sich der Spezialfall direkt aus der allgemeinen Bedingung. $\square$

Der Spezialfall aus Satz 4.7 wurde bereits in [Mo2] sowie [N] bewiesen. Es wird vermutet, daß für jeden nichttrivialen Knoten $K \hookrightarrow S^3$ die sogenannte "Property R" gilt: $M_{0,1}(K) \neq S^2 \times S^1$ (siehe [K-M]).

4.8 SATZ

Für $p \geq 1$ sei $M_{p,q_1}(K_1) \approx M_{p,q_2}(K_2)$. Daraus folgt: $\exists v \in \mathbb{Z}, (v,p) = 1$, mit:

- i) $q_2 \equiv \pm v^2 q_1 \pmod{p}$
- ii) $(t-1)(t^{v^2 q_1} - 1) \Delta_{K_1}(t^{v q_1}) \equiv (t^v - 1)(t^{v q_1} - 1) \Delta_{K_2}(t^{v^2 q_1}) \pmod{t^p - 1}$.

Dabei sind $\Delta_{K_1}(t)$ und $\Delta_{K_2}(t)$ die Alexanderpolynome der Knoten $K_1 \hookrightarrow S^3$ bzw. $K_2 \hookrightarrow S^3$. Die Bedingungen i) und ii) sind äquivalent zu denen aus Satz 4.6.

BEMERKUNG

Die Bedingungen i) und ii) aus 4.8 sind symmetrisch bezüglich q_1 und q_2 : Aus i) folgt $q_1 \equiv \pm(v^{-1})^2 q_2 \pmod p$. Bei Anwendung der Substitution $t \mapsto t^{v^{-1}}$, welche wegen $(v, p) = 1$ einen Automorphismus des Gruppenringes $\mathbb{Z}\langle t | t^p = 1 \rangle$ definiert, auf die Gleichung ii) ergibt sich durch Vertauschung der Seiten eine formal gleiche Bedingung, in der q_1 mit q_2 vertauscht und v durch v^{-1} ersetzt ist. Bei gegebenen Knotenpolynomen $\Delta_{k_1}(t)$ und $\Delta_{k_2}(t)$ lassen sich i) und ii) für feste Zahlen p, q_1, q_2 in endlich vielen Rechenschritten nachprüfen, da $v \pmod p$ gerechnet wird, und der Gruppenring $\mathbb{Z}\langle t | t^p = 1 \rangle$ wegen $p \geq 1$ nur die endlich vielen trivialen Einheiten $\pm t^j$, $j = 1, \dots, p-1$ besitzt.

BEWEIS

Teil i) ist direkt aus Satz 4.6 übernommen. Zum Beweis von ii) betrachte man die Ringeinbettung $\mathbb{Z}\langle t | t^{p'} = 1 \rangle \rightarrow \bigoplus_{d' | p'} \mathbb{Z}[\xi_{d'}]$, $p' \geq 1$, wobei $\mathbb{Z}[\xi_{d'}]$ durch Adjunktion einer d' -ten primitiven Einheitswurzel $\xi_{d'} \in \mathbb{C}$ an $\mathbb{Z}$ entstanden sei. Ein Element $f(t) \in \mathbb{Z}\langle t | t^{p'} = 1 \rangle$ wird dabei nach $(f(1), \dots, f(\xi_{d'_1}), \dots, f(\xi_{p'}))$ abgebildet, mit $1, \dots, d', \dots, p'$ als den verschiedenen Teilern von p' (siehe [A-A] Abschnitt 1). Während die einzelnen Summanden $\mathbb{Z}[\xi_{d'}]$ nullteilerfrei sind, gilt dies für $\mathbb{Z}\langle t | t^{p'} = 1 \rangle$ nicht, falls $p' \geq 2$ ist. Die Bedingung ii) aus 4.6 lautet ausgeschrieben:

$$4.8.1 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ gilt } (\bmod t^{\frac{p}{d}} - 1):$$

$$\frac{\frac{vq_1 \bar{n} n (p+r_1 n)}{d}}{(t^{\frac{vq_1 \bar{n}}{d}} - 1)(t^{\frac{vq_1 \bar{n}}{d}} - 1)} \Delta_{k_1} (t^{vq_1}) \equiv \frac{\frac{q_2 \bar{v} n v n (p+r_2 v n)}{d}}{(t^{\frac{q_2 \bar{v} n}{d}} - 1)(t^{\frac{q_2 \bar{v} n}{d}} - 1)} \Delta_{k_2} (t^{q_2})$$

Durch Multiplikation mit den entsprechenden Nennern und durch Vereinfachung der Exponenten von t ergibt sich aus 4.8.1:

4.8.2 $v n \in \mathbb{Z}$ gilt $(\text{mod } t^{\frac{p}{d}} - 1)$:

$$(t^{v n - 1})(t^{vq_1 \bar{n}} - 1)(t^{q_2 - 1})(t - 1) \Delta_{k_1} (t^{vq_1}) \equiv (t^{v n - 1})(t^{q_2 \bar{v} n} - 1)(t^{vq_1 - 1})(t^{v - 1}) \Delta_{k_2} (t^{q_2}).$$

Es gilt auch die Umkehrung (4.8.2 $\Rightarrow$ 4.8.1). Dazu muß nachgewiesen werden, daß die Gleichung aus 4.8.1 für alle Substitutionen $t \mapsto \xi_d$, $d' \mid \frac{p}{d}$ erfüllt ist. Für $t \mapsto 1$ ist dies der Fall, da sich nach 3.1.2 und 4.4.1 auf beiden Seiten der Gleichung d ergibt. Für die übrigen Substitutionen $t \mapsto \xi_d$, mit $\xi_d \neq 1$ gilt, daß beide Nenner auf von null verschiedene Elemente aus $\mathbb{C}$ abgebildet werden, weil die vier entsprechenden Exponenten von t der Reihe nach $(\text{mod } \frac{p}{d})$ gerechnet vq_1, v, q_2 und 1 lauten und somit teilerfremd zu p und damit zu d' sind. Dies bedeutet, daß nach Ausführung der Substitution $t \mapsto \xi_d$, mit $\xi_d \neq 1$, die Gleichung aus 4.8.1 wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}[\xi_d]$ aus 4.8.2 folgt. Insgesamt gilt, daß 4.8.1 und 4.8.2 äquivalent sind.

Wegen $q_2 \equiv \pm v^2 q_1 \pmod{p}$ und $q_2 \bar{v} n \equiv q_2 v^{-1} n^{-1} \equiv \pm v q_1 \bar{n} \pmod{\frac{p}{d}}$ läßt sich

4.8.2 umformen zu:

4.8.3 $v n \in \mathbb{Z}$ gilt $(\text{mod } t^{\frac{p}{d}} - 1)$:

$$(t^{v n - 1})(t^{vq_1 \bar{n}} - 1)(t^{v^2 q_1 - 1})(t - 1) \Delta_{k_1} (t^{vq_1}) \equiv (t^{v n - 1})(t^{vq_1 \bar{n}} - 1)(t^{vq_1 - 1})(t^{v - 1}) \Delta_{k_2} (t^{v^2 q_1})$$

Obwohl $(t^{vn}-1)(t^{vq_1\bar{n}}-1)$ kein Nullteiler in $\mathbb{Z}[t] \mid t^{\frac{p}{d}} = 1$ ist, läßt es sich aus 4.8.3 herauskürzen. Es folgt

$$4.8.4 \quad (t^{v^2q_1-1})(t-1)\Delta_{K_1}(t^{vq_1}) \equiv (t^{vq_1-1})(t^v-1)\Delta_{K_2}(t^{v^2q_1}) \pmod{t^p-1}.$$

Zum Beweis muß wieder nachgewiesen werden, daß 4.8.4 unter der Voraussetzung von 4.8.3 für alle Substitutionen $t \mapsto \xi_{d'}$, $d' \mid p$, erfüllt ist. Für $t \mapsto 1$ gilt dies trivialerweise. Für $t \mapsto \xi_{d'}$, mit $\xi_{d'} \neq 1$ betrachte man 4.8.3 für den Fall $n = 1$, d.h. $d = 1$: Da wegen $(v, p) = 1$, $(vq_1, p) = 1$ gilt: $(\xi_{d'}^v-1)(\xi_{d'}^{vq_1}-1) \neq 0$ für $d' \neq 1$, läßt sich dieser Faktor nach Ausführung der Substitution aus 4.8.3 herauskürzen. Insgesamt gilt: $(4.8.3 \Rightarrow 4.8.4)$. Die Umkehrung $(4.8.4 \Rightarrow 4.8.3)$ ist trivialerweise erfüllt. $\square$

In Spezialfällen läßt sich Satz 4.8 weiter vereinfachen. Dazu wird ein Lemma benötigt, dessen erster Teil aus [Bro] stammt:

4.9 LEMMA

i) Sei $p \geq 1$, $(n, p) = 1$, $r \cdot q \equiv 1 \pmod{p}$. Dann gilt:

$$P(n, p+rn)(t) \equiv 1 \pmod{t^p-1} \Leftrightarrow n \equiv \pm 1, \pm q \pmod{p}$$

ii) Sei $p \geq 1$, a, b, c und d seien teilerfremd zu p . Dann gilt:

$$(t^a-1)(t^b-1) \equiv (t^c-1)(t^d-1) \pmod{t^p-1} \Leftrightarrow a \text{ und } b \text{ stimmen mit } c \text{ und } d \text{ bis auf Vorzeichen und Reihenfolge mod } p \text{ überein.}$$

BEWEIS

i) siehe [Bro] Abschnitt 4.

ii) Da die Gleichung nur bis auf triviale Einheiten $\pm t^v$ gelten soll, ist "eq" trivial. Es sei $(t^a-1)(t^b-1) \equiv \varepsilon \cdot t^v(t^c-1)(t^d-1)$, $\varepsilon = \pm 1$.

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } \varepsilon = 1 &\Rightarrow t^{a+b} - t^a - t^b + 1 \equiv t^{c+d+v} - t^{c+v} - t^{d+v} + t^v \Rightarrow \\ &t^{a+b} + t^{c+v} + t^{d+v} + 1 \equiv t^{c+d+v} + t^a + t^b + t^v. \end{aligned}$$

Da sich keine zwei Summanden auf derselben Seite der Gleichung wegheben können, müssen links und rechts die mod p gleichen Exponenten auftreten. Wegen $a \not\equiv 0$, $b \not\equiv 0 \pmod{p}$ kann nur $c+d+v \equiv 0$ oder $v \equiv 0 \pmod{p}$ gelten. Der Fall $c+d+v \equiv 0$ liefert die Gleichung

$t^{a+b} + t^{-d} + t^{-c} \equiv t^a + t^b + t^{-c-d}$. Wegen $a+b \not\equiv a$ und $a+b \not\equiv b$ muß $a+b \equiv -c-d$ gelten. Es folgt $t^{-d} + t^{-c} \equiv t^a + t^b$, woraus sich $a \equiv -d$, $b \equiv -c$ oder $a \equiv -c$, $b \equiv -d$ ergibt. Für $v \equiv 0$ ergibt sich die Gleichung $t^{a+b} + t^c + t^d \equiv t^{c+d} + t^a + t^b$. Wegen $a+b \not\equiv a$, $a+b \not\equiv b$ folgt $a+b \equiv c+d$ und $t^c + t^d \equiv t^a + t^b$. Daraus resultiert $a \equiv c$, $b \equiv d$ oder $a \equiv d$, $b \equiv c$.

Fall 2: $\varepsilon = -1$: Es ergeben sich analog die restlichen vier möglichen Fälle. $\square$

Das nächste Korollar macht eine Aussage zu dem Problem, wann durch Surgery an einem Knoten $K \rightarrow S^3$ ein Linsenraum entstehen kann. Daß dies auch für einen nichttrivialen Knoten möglich ist, wird in [Mo1] durch Bestimmung aller diesbezüglichen Fälle für Torusknoten gezeigt (siehe auch Kapitel 6). In [B-R] und [F-S] werden entsprechende Beispiele für kompliziertere Knoten gegeben.

4.10 KOROLLAR

Für $p \geq 1$ gelte $M_{p,q_1}(k) \approx L_{p,q_2}$. Daraus folgt: $\exists v \in \mathbb{Z}$, $(v,p) = 1$ mit:

$$i) \quad q_2 \equiv \pm v^2 q_1 \pmod{p}$$

$$ii) \quad (t-1)(t^{v^2 q_1 - 1}) \Delta_k(t^{v q_1}) \equiv (t^v - 1)(t^{v q_1 - 1}) \pmod{t^p - 1}.$$

Insbesondere ist $\Delta_k(t)$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[t]/t^p = 1$.

BEWEIS

Da für den trivialen Knoten $\tilde{k}$ $M_{p,q_2}(\tilde{k}) \approx L_{p,q_2}$ und $\Delta_{\tilde{k}}(t) = 1$ gilt, ergibt sich i) und ii) bis auf die letzte Aussage unmittelbar aus Satz

4.8. Durch Anwendung von Lemma 4.9 i) auf Satz 4.6 ii) ergibt sich für den Fall $vn \equiv 1 \pmod{p}$ die Gleichung

$P_{(n,p+rn)}(t^{\frac{vq_1 n}{vq_1}}) \Delta_k(t^{vq_1}) \equiv 1 \pmod{t^p - 1}$. Die Ausführung der Substitution: $t \mapsto t^{\frac{vq_1 n}{vq_1}}$, mit $\overline{vq_1} \equiv (vq_1)^{-1} \pmod{p}$, zeigt, daß $\Delta_k(t)$ eine Einheit $\pmod{t^p - 1}$ ist. $\square$

Das nächste Korollar beinhaltet die Linsenraumklassifikation 0.1 als Spezialfall. Es wird gezeigt, daß die entsprechende Formel für eine größere Klasse von Surgery-Mannigfaltigkeiten gültig ist.

4.11 KOROLLAR

Es sei $p \geq 1$ und $M_{p,q_1}(k_1) \approx M_{p,q_2}(k_2)$. Falls die Bedingungen

$$\Delta_{k_1}(t) \equiv \Delta_{k_2}(t) \equiv: \Delta(t) \text{ sowie } \Delta(t^v) \equiv \Delta(t) \text{ für alle } v \in \mathbb{Z}, (v,p) = 1$$

$\text{mod } t^{p-1}$ erfüllt sind und $\Delta(t)$ kein Nullteiler $\text{mod } t^{p-1}$ ist, gilt:

$$q_2 \equiv \pm q_1^{\pm 1} \text{ mod } p.$$

BEWEIS

Aus Satz 4.8 und den Voraussetzungen folgt: $\exists v \in \mathbb{Z}$, $(v, p) = 1$, mit $q_2 \equiv \pm v^2 q_1 \text{ mod } p$ und $(t-1)(t^{v^2 q_1 - 1} \Delta(t^{v q_1})) \equiv (t^v - 1)(t^{v q_1 - 1} \Delta(t^{v q_1})) \text{ mod } t^{p-1}$ sowie $\Delta(t^{v q_1}) \equiv \Delta(t^{v^2 q_1}) \text{ mod } t^{p-1}$. Da mit $\Delta(t)$ auch $\Delta(t^{v q_1})$ kein Nullteiler $\text{mod } t^{p-1}$ ist, läßt es sich aus der Gleichung herauskürzen. Es ergibt sich: $(t-1)(t^{v^2 q_1 - 1}) \equiv (t^v - 1)(t^{v q_1 - 1}) \text{ mod } t^{p-1}$. Nach Lemma 4.9 ii) folgt: $v \equiv \pm 1$ oder $v \equiv \pm v^2 q_1$, d.h. $v \equiv q_1^{-1} \text{ (mod } p)$. Für $v \equiv \pm 1$ ergibt sich $q_2 \equiv \pm q_1$ und für $v \equiv \pm q_1^{-1}$ ergibt sich $q_2 \equiv \pm q_1^{-1} \text{ mod } p$. $\square$

BEMERKUNG

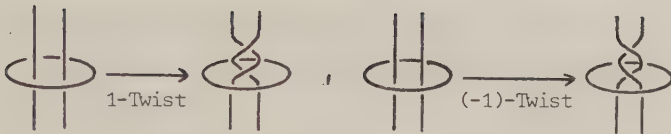
Falls $\Delta_{k_1}(t) = \Delta_{k_2}(t) = 1$ gilt, sind die Voraussetzungen zu 4.11 trivialerweise für alle $p \geq 1$ erfüllt. Neben dem trivialen Knoten haben z.B. alle sogenannten "doubled knots" triviales Alexanderpolynom (siehe [Ro] S. 167). Falls k_1 und k_2 dem trivialen Knoten gleich sind, folgt $M_{p, q_1}(k_1) \approx L_{p, q_1}$ und $M_{p, q_2}(k_2) \approx L_{p, q_2}$, und es ergibt sich die Linsenraumklassifikation 0.1. Für festes $p \geq 1$ sind die Voraussetzungen zu 4.11 ebenfalls trivialerweise erfüllt, falls $\Delta(t) \equiv 1 \text{ mod } t^{p-1}$ gilt. Aber auch falls $\Delta(t) \not\equiv 1 \text{ mod } t^{p-1}$ gilt, ist dies möglich, z.B. für $p = 5$ und $\Delta(t) \equiv 1 + t - 3t^2 + t^3 + t^4 \text{ (mod } t^5 - 1)$.

5. BEISPIELE

In diesem Kapitel werden Satz 4.8 und Korollar 4.10 auf einzelne Beispiele angewandt. Weil dabei und im nächsten Kapitel der Kirby-Kalkül verwandt wird, soll dieser vorweg erläutert werden. Surgery-Beschreibungen von 3-Mannigfaltigkeiten lassen sich auf zwei Arten variieren, ohne dabei den Homöomorphietyp der Mannigfaltigkeit zu ändern. Hierbei sei die Surgery-Konstruktion allgemeiner an einer Verkettung in S^3 vorgenommen. Die Koeffizienten p und q bezüglich jeder Knotenkomponente werden zu einem Bruch $r := \frac{p}{q}$ zusammengefaßt und an die entsprechende Komponente in einer zeichnerischen Darstellung der Verkettung geschrieben. Dabei wird $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ gerechnet. Folgende Modifikationen sind möglich (siehe [Ro] Kap. 9, G und H):

5.1 Komponenten mit Koeffizient ∞ können hinzugefügt sowie entfernt werden. Die anderen Komponenten und deren Koeffizienten bleiben unverändert.

5.2 Im Außenraum einer trivialen Komponente (es handelt sich dabei um einen Volltorus) können c -fache Vertwistungen, $c \in \mathbb{Z}$, vorgenommen werden, und zwar Rechtstwists falls $c > 0$ bzw. Linkstwists falls $c < 0$.



Für die Koeffizienten r und r' einer trivialen Komponente k und einer beliebigen anderen Komponente k' gelten bei Ausführung eines c -Twists an k folgende Transformationsformeln:

$$5.3 \quad r \mapsto \frac{1}{c + \frac{1}{r}}, \quad r' \mapsto r' + c(\text{lk}(k, k'))^2, \quad \text{lk}(k, k') \text{ ist dabei die Verschlingungszahl von } k \text{ und } k' \text{ in } S^3.$$

In [K] wird gezeigt, daß zwei Surgery-Beschreibungen genau dann bis auf Orientierung homöomorphe 3-Mannigfaltigkeiten repräsentieren, wenn sie sich durch endlich viele Prozesse gemäß 5.1 und 5.2 ineinander überführen lassen. Deshalb werden diese Modifikationen in der Literatur oft als Kirby-Kalkül bezeichnet.

5.4 LEMMA

Es sei k ein PL-Knoten in S^3 mit Alexanderpolynom $\Delta_k(t) = 1 - t + t^2$. Für $p = 9$ folgt aus $M_{9, q_1}(k) \approx M_{9, q_2}(k)$:

$$q_1 \equiv \pm 1 \pmod{9} \Rightarrow q_2 \equiv \pm 1, \pm 2 \pmod{9}$$

$$q_1 \equiv \pm 2 \pmod{9} \Rightarrow q_2 \equiv \pm 1, \pm 2 \pmod{9}$$

$$q_1 \equiv \pm 4 \pmod{9} \Rightarrow q_2 \equiv \pm 4 \pmod{9}$$

BEWEIS

Es muß nachgeprüft werden, welche v 's die Gleichung aus Satz 4.8 ii) bis auf triviale Einheiten erfüllen. Für $q_1 \equiv \pm 1$, $q_1 \equiv \pm 2$ und $q_1 \equiv \pm 4 \pmod 9$ gilt dies für $v \equiv \pm 1, \pm 4$ bzw. $v \equiv \pm 1, \pm 2$ bzw. $v \equiv \pm 1 \pmod 9$. Auf die konkreten Rechnungen sei hier verzichtet. Aus Satz 4.8 i) ergeben sich daraus die Bedingungen für q_2 . $\square$

Insbesondere folgt aus 5.4 für die Kleeblattschlinge k :

$$5.5 \quad M_{9,-1}(k) \neq M_{9,4}(k)$$

Dieses Beispiel wird in Kap. 6 aufgegriffen. Daß für spezielle Knoten mit Alexanderpolynom $1-t+t^2$ wirklich homöomorphe Mannigfaltigkeiten entstehen können, läßt sich anhand der (rechtshändigen) Kleeblattschlinge zeigen:

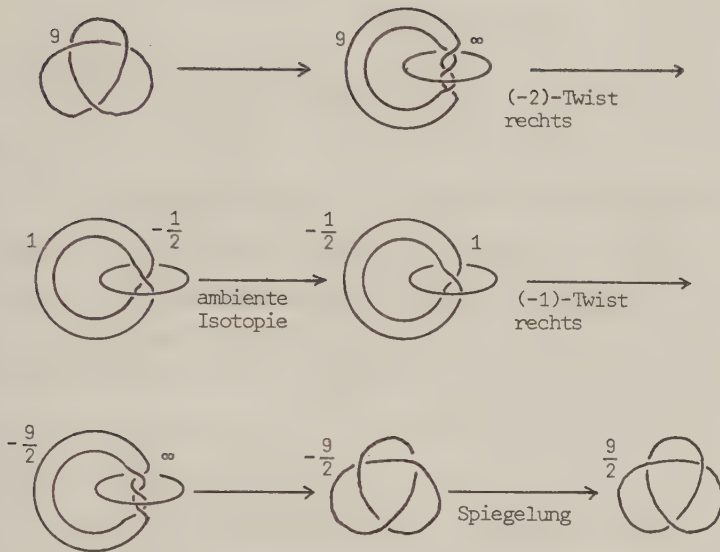
5.6 LEMMA

Für die rechtshändige Kleeblattschlinge k gilt:

$$M_{9,1}(k) \approx M_{9,2}(k)$$

BEWEIS

Die entsprechenden Surgery-Beschreibungen werden mit Hilfe des Kirby-Kalküls ineinander überführt:



□

BEMERKUNG

Lemma 5.6 zeigt, daß die Formel $q_2 \equiv \pm q_1^{\pm 1} \pmod{p}$ aus Korollar 4.11 nicht für alle Knoten aus S^3 gilt ($2 \not\equiv \pm 1^{\pm 1} \pmod{9}$).

5.7 LEMMA

Es sei k ein PL-Knoten in S^3 mit Alexanderpolynom $\Delta_k(t) = 1-t+t^2$.

Für $p = 5$ folgt aus $M_{5,q_1}(k) \approx L_{5,q_2}$:

$$q_1 \equiv \pm 1 \pmod{5} \Rightarrow q_2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$$
$$q_1 \equiv \pm 2 \pmod{5} \quad \text{ist nicht m\u00f6glich.}$$

BEWEIS

Es mu\u00df nachgepr\u00fcft werden, welche v 's die Gleichung aus Korollar 4.10 ii) bis auf triviale Einheiten erf\u00fcllen. Bei $q_1 \equiv \pm 1 \pmod{5}$ gilt dies f\u00fcr $v \equiv \pm 2 \pmod{5}$. Bei $q_1 \equiv \pm 2$ existiert kein solches v . Auf die konkreten Rechnungen sei hier wieder verzichtet. Die Bedingung f\u00fcr q_2 ergibt sich aus Korollar 4.10 i). $\square$

Da\u00df durch Surgery an speziellen Knoten mit Alexanderpolynom $1-t+t^2$ wirklich Linsenr\u00e4ume entstehen k\u00f6nnen, l\u00e4\u00dft sich wieder anhand der Kleeblattschlinge zeigen (siehe [Mo1] und Kapitel 6 Satz 6.5).

6. SURGERY AN TORUSKNOTEN

Für Torusknoten $k_{a,b}$, $(a,b) = 1$, (siehe [Skript 2] S. 3.11) lassen sich die Surgery-Mannigfaltigkeiten $M_{p,q}(k_{a,b})$ vollständig nach Homöomorphie klassifizieren. In [Mo1] wird gezeigt, daß dabei Linsenräume, zusammenhängende Summen zweier Linsenräume sowie Seifert'sche Faserräume mit drei Ausnahmefasern der Ordnungen $|a|$, $|b|$ und $|p-abq|$ entstehen. Entgegen einer Bemerkung in [Mo1] reichen diese drei Zahlen zusammen mit p im allgemeinen nicht aus, um den Raum eindeutig zu bestimmen. Als Beispiel betrachte man $M_{9,-1}(k)$ und $M_{9,4}(k)$ mit k als (rechtshändiger) Kleeblattschlinge, d.h. dem Torusknoten $k_{3,2}$. Nach Kapitel 5 sind diese Räume nicht homöomorph, obwohl in beiden Fällen die entsprechenden Ordnungen 2,3 und 15 lauten.

Deshalb sollen hier alle Invarianten im Sinne von Seifert (siehe [Sei1]) berechnet werden. Die beiden ersten Fälle werden nochmals mitbewiesen. Die Methode ist eine andere als in [Mo1] und verwendet hauptsächlich den Kirby-Kalkül. Beim Vergleich mit den Ergebnissen aus [Mo1] beachte man die unterschiedlichen Bezeichnungen von a,b,p,q und die entgegengesetzte Orientierung von S^3 (was sich in einem anderen Vorzeichen bemerkbar macht).

Nach [Skript 2] S. 3.11 gilt für den inversen Knoten:

$k_{a,b}^{-1} = k_{-a,-b} = k_{a,b}$ und für den gespiegelten Knoten: $-k_{a,b} = k_{a,-b}$ sowie $k_{a,b} = k_{b,a}$. Zur Bestimmung der Surgery-Mannigfaltigkeiten

$M_{p,q}(k_{a,b})$ läßt sich deshalb wegen 1.4 o.B.d.A. $2 \leq b < a$ voraussetzen.

Folgendes Lemma über den Euklid'schen Algorithmus wird gebraucht.

Vorweg sei die rekursive Definition eines Kettenbruchs gegeben:

6.1 DEFINITION

$$[q_1] := q_1, [q_{n+1}, q_n, \dots, q_1] := q_{n+1} + [q_n, \dots, q_1]^{-1}, q_i \in \mathbb{Z}$$

6.2 LEMMA

Für $a, b \geq 2$, $(a, b) = 1$, sei der Euklid'sche Algorithmus durchgeführt:

$$\begin{array}{llll} a & = q_1 b & + r_1 & \\ b & = q_2 r_1 & + r_2 & \text{mit } r_{n-1} = 1, r_n = 0 \\ : & : & & \text{Für } i = 1, \dots, n \text{ seien } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z} \text{ rekursiv} \\ r_i & = q_{i+2} r_{i+1} + r_{i+2} & & \text{durch sukzessives Einsetzen der Gleichungen} \\ : & : & & i-1, \dots, 1 \text{ in die } i\text{-te Gleichung definiert,} \\ r_{n-3} & = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} & & \text{mit } \alpha_i a + \beta_i b = r_i, \text{ d.h. speziell mit} \\ r_{n-2} & = q_n r_{n-1} + r_n & & \alpha_{n-1} a + \beta_{n-1} b = 1 \end{array}$$

$$\text{Dann gilt: } [q_n, \dots, q_1] = (-1)^{n-1} \frac{a}{\beta_{n-1}}, [q_n, \dots, q_2] = (-1)^n \frac{b}{\alpha_{n-1}}$$

BEWEIS

Der Beweis soll nur skizziert werden. α_i und β_i erfüllen die Rekursionsformeln: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -q_2$, $\alpha_{i+2} = \alpha_i - q_{i+2} \alpha_{i+1}$ und $\beta_1 = -q_1$, $\beta_2 = 1 + q_1 q_2$, $\beta_{i+2} = \beta_i - q_{i+2} \beta_{i+1}$. Durch Induktion über i folgt:

$$6.2.1 \quad \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}} = -[q_i, \dots, q_1], \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = -[q_i, \dots, q_2], \quad i = 2, \dots, n.$$

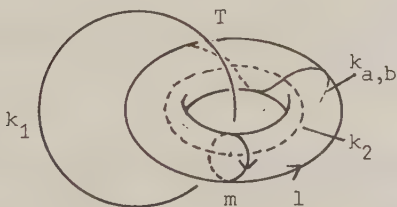
Durch Induktion über die Länge n vom Euklid'schen Algorithmus ergibt sich unter Verwendung von Formel 6.2.1:

$$6.2.2 \quad \beta_n = (-1)^n a, \alpha_n = (-1)^{n-1} b.$$

Für $i = n$ folgt aus 6.2.1 und 6.2.2 die Behauptung. $\square$

Für $a, b \in \mathbb{Z}$, $2 \leq b < a$, $(a, b) = 1$, sei $k_{a,b}$ ein Torusknoten, d.h. $k_{a,b}$ liegt auf dem Rand T einer regulären Umgebung V_2 des trivialen Knotens k_2 aus S^3 und ist in T homolog zu $a \cdot m + b \cdot l$, mit m als Meridian und l als Längskreis von k_2 . Die Orientierung von $\mathbb{R}^3$ und damit von $S^3 \approx \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ sei wieder durch den Rechte-Hand-Drehsinn festgelegt. Der Abschluß V_1 von $S^3 \setminus V_2$ ist ebenfalls ein Volltorus mit T als Rand. Die Seele k_1 von V_1 ist ebenso wie k_2 ein trivialer Knoten in S^3 (siehe [Skript 2] S. 3.11).

Skizze:



Durch alternierendes Twisten an k_1 und k_2 gemäß dem Kirby-Kalkül, läßt sich $k_{a,b}$ in endlich vielen Schritten in einen trivialen Knoten überführen, wobei k_1 und k_2 festbleiben und T auf sich abgebildet wird. In $H_1(T) \approx \langle m, l \mid [m, l] = 1 \rangle$ gilt dabei für einen c-Twist:

Ein c-Twist an k_1 bewirkt: $m \mapsto m, l \mapsto l + c \cdot m, c \in \mathbb{Z}$

Ein c-Twist an k_2 bewirkt: $m \mapsto m + c \cdot l, l \mapsto l, c \in \mathbb{Z}$.

Es seien $q_1, \dots, q_n$ und $r_1, \dots, r_n$ die entsprechenden Zahlen vom Euklid'schen Algorithmus für a und b aus Lemma 6.2. Es werden insgesamt n Twists an k_1 und k_2 ausgeführt, wobei gelten soll: der i -te Twist ($i = 1, \dots, n$) ist ein $(-q_i)$ -Twist an k_1 , falls i ungerade und ein $(-q_i)$ -Twist an k_2 , falls i gerade ist. Das Bild von $k_{a,b}$ nach dem i -ten Twist ist wieder ein Knoten in T und wird mit k^i bezeichnet.

6.3 LEMMA

Für die Surgery-Koeffizienten von k_1, k_2 und $k^i, i = 1, \dots, n$ gilt:

	Vor dem 1. Twist	Nach dem 1. Twist	Nach dem 2. Twist	...	nach dem i -ten Twist
k_1	∞	$-[q_1]^{-1}$	$-[q_2, q_1]$	...	$-[q_1, \dots, q_1]^{(-1)^i}$
k_2	∞	∞	$-[q_2]^{-1}$	...	$-[q_1, \dots, q_2]^{(-1)^{i-1}}$
$k_{a,b}$	$\frac{p}{q}$ $k_{a,b} \sim$ $am+bl$	$\frac{p}{q} - ab+br_1$ $k^1 \sim$ r_1m+bl	$\frac{p}{q} - ab+r_1r_2$ $k^2 \sim$ r_1m+r_2l	...	$\frac{p}{q} - ab+r_{i-1}r_i$ i gerade: $k^i \sim r_{i-1}m+r_i l$ i ungerade: $k^i \sim r_i m+r_{i-1} l$

BEWEIS

Die Surgery-Koeffizienten lauten zu Beginn: $k_1: \infty$, $k_2: \infty$, $k_{a,b}: \frac{p}{q}$.

Es wird eine Induktion über i durchgeführt: Der 1. Twist ist ein

$(-q_1)$ -Twist an k_1 . Für die Koeffizienten ergibt sich:

$$k_1: (-q_1 + \frac{1}{\infty})^{-1} = -\frac{1}{q_1} = -[q_1]^{-1}, \quad k_2: \infty - q_1 \cdot 1 = \infty \quad (\text{lk}(k_1, k_2) = \pm 1),$$

(wegen $k_{a,b} \sim am + bl$ gilt: $\text{lk}(k_1, k_{a,b}) = \pm b$) $k^1: \frac{p}{q} - q_1 \cdot b^2$

$$= \frac{p}{q} - b(am + bl) = \frac{p}{q} - ab + br_1 \quad \text{und} \quad k^1 \sim am + b(1 - q_1 m) = (a - q_1 b)m + bl$$

$= r_1 m + bl$. Die Aussage über den zweiten Twist, ein $(-q_2)$ -Twist an k_2 , wird analog bewiesen.

Induktionsschritt $i-1 \rightarrow i$:

Für $i-1$ ungerade, gilt nach Induktionsvoraussetzung: $k^{i-1} \sim r_{i-1}m + r_{i-2}l$

mit den Koeffizienten $k^{i-1}: \frac{p}{q} - ab + r_{i-2}r_{i-1}$, $k_1: -[q_{i-1}, \dots, q_1]^{-1}$,

$k_2: -[q_{i-1}, \dots, q_2]$. Der i -te Twist ist in diesem Fall ein $(-q_i)$ -Twist

an k_2 . Für die Koeffizienten folgt:

$$k_1: -[q_{i-1}, \dots, q_1]^{-1} - q_i \cdot 1 = -[q_i, \dots, q_1], \quad k_2: (-q_i - [q_{i-1}, \dots, q_2]^{-1})^{-1}$$

$$= -[q_i, \dots, q_2]^{-1}, \quad k^i: \frac{p}{q} - ab + r_{i-2}r_{i-1} - q_i r_{i-1}^2 \quad (\text{wegen}$$

$$\text{lk}(k_2, k^{i-1}) = \pm r_{i-1}) = \frac{p}{q} - ab + r_{i-1}(r_{i-2} - q_i r_{i-1}) = \frac{p}{q} - ab + r_{i-1}r_i$$

$$\text{und} \quad k^i \sim r_{i-1}(m - q_i l) + r_{i-2}l = r_{i-1}m + (r_{i-2} - q_i r_{i-1})l = r_{i-1}m + r_i l.$$

Der Induktionsschritt für gerades $i-1$ wird analog bewiesen. $\square$

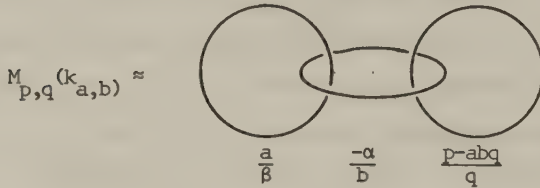
Nach diesen Vorbereitungen läßt sich für die Mannigfaltigkeit

$M_{p,q}(k_{a,b})$ eine vereinfachte Surgery-Beschreibung angeben:

6.4 SATZ

Es sei $k_{a,b}$ ein Torusknoten in S^3 mit $(a,b) = 1$, $a, b \geq 2$. Dann folgt:

Es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha a + \beta b = 1$, $-b < \alpha < 0 < \beta < a$, so daß gilt:



BEWEIS

Falls die Längen n vom Euklid'schen Algorithmus für a, b aus Lemma 6.2

gerade ist, folgt wegen $r_{n-1} = 1$, $r_n = 0$ aus Lemma 6.3:

$k^n \sim r_{n-1}m + r_n l = m$ (in T), d.h.: k^n ist trivial.

Die Koeffizienten der Verkettung k_1, k_2 und k^n lauten der Reihe nach gemäß Lemma 6.3 und 6.2: $-[q_n, \dots, q_1] = \frac{a}{\beta_{n-1}}$, $-[q_n, \dots, q_2]^{-1} = -\frac{\alpha_{n-1}}{b}$ und $\frac{p}{q} - ab + r_{n-1}r_n = \frac{p-abq}{q}$. Daraus folgt:

$$6.4.1 \quad M_{p,q}(k_{a,b}) \approx \frac{a}{\beta_{n-1}} \quad \text{---} \quad \frac{p-abq}{q}$$

$$\frac{-\alpha_{n-1}}{b}$$

mit $\alpha_{n-1}a + \beta_{n-1}b = 1$.

Zur Frage der Normierung von α_{n-1} und β_{n-1} gilt: Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha a + \beta b = 1$ gibt es ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha = \alpha_{n-1} + c \cdot b$ und $\beta = \beta_{n-1} - c \cdot a$. Ein $(-c)$ -Twist an der linken Komponente der Verkettung aus 6.4.1 ändert die Geometrie der Beschreibung nicht. Die Koeffizienten würden sich folgendermaßen ändern:

$$\frac{a}{\beta_{n-1}} \mapsto (-c + \frac{\beta_{n-1}}{a})^{-1} = \frac{a}{\beta}, \quad \frac{-\alpha_{n-1}}{b} \mapsto \frac{-\alpha_{n-1}}{b} - c \cdot 1 = \frac{-\alpha}{b}, \quad \frac{p-abq}{q}$$

bleibt fest. Deshalb läßt sich α durch eine geeignete Wahl von c in der im Satz angegebenen Weise normieren. Die Bedingung $0 < \beta < a$ ergibt sich dann als Folgerung.

Falls n ungerade ist, ergibt sich $k^n \sim 1(\text{in } T)$. Hierbei folgt:

$$M_{p,q}(k_{a,b}) \sim \frac{b}{a} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram: Two circles with a horizontal line through the intersection. The left circle is labeled } \frac{\beta}{a} \text{ below it. The right circle is labeled } \frac{p-abq}{q} \text{ above it.} \end{array} \xrightarrow{\text{1-Twist in der Mitte}}$$

$$\frac{b+a}{\alpha} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram: Two circles with a horizontal line through the intersection. The left circle is labeled } \frac{\beta}{\beta-a} \text{ below it. The right circle is labeled } \frac{p-abq+q}{q} \text{ above it.} \end{array} \xrightarrow{\text{ambiante Isotopie}} \begin{array}{c} \text{Diagram: Two circles with a horizontal line through the intersection. The left circle is labeled } \frac{\beta}{\beta-a} \text{ below it. The right circle is labeled } \frac{p-abq+q}{q} \text{ above it.} \end{array} \xrightarrow{\text{(-1)-Twist in der Mitte}}$$

$$\frac{a}{\beta-a} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram: Two circles with a horizontal line through the intersection. The left circle is labeled } \frac{b+a}{\beta-a} \text{ below it. The right circle is labeled } \frac{p-abq}{q} \text{ above it.} \end{array} \xrightarrow{\text{1-Twist links}} \begin{array}{c} \text{Diagram: Two circles with a horizontal line through the intersection. The left circle is labeled } \frac{a}{\beta} \text{ below it. The right circle is labeled } \frac{p-abq}{q} \text{ above it.} \end{array}$$

Für beide Fälle ergibt sich demnach die gleiche Beschreibung von

$$M_{p,q}(k_{a,b}). \quad \square$$

Satz 6.4 ermöglicht die vollständige Klassifikation der Räume

$$M_{p,q}(k_{a,b}):$$

6.5 SATZ

$k_{a,b}$ sei ein Torusknoten in S^3 mit $(a,b) = 1$, $a, b \geq 2$, $\sigma := p - abq$,
 $\epsilon = \pm 1$ sei das Vorzeichen von σ (falls $\sigma \neq 0$). Dann gilt: Die Surgery-Mannigfaltigkeit $M_{p,q}(k_{a,b})$ ist homöomorph zu:

$$i) L_{a,b} \# L_{b,a} \quad \text{falls } \sigma = 0$$

$$ii) L_{p, a^2 |q|} \approx L_{p, b^2 |q|} \quad \text{falls } |\sigma| = 1$$

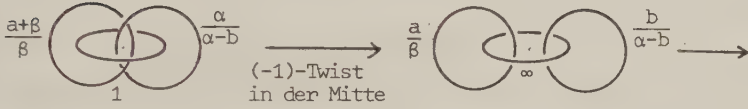
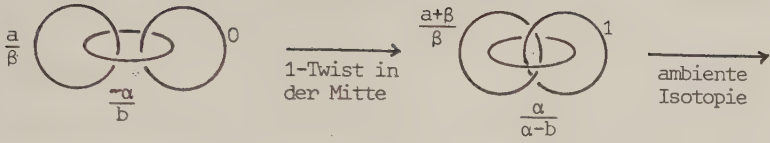
iii) Seifert'scher Faserraum mit den Invarianten:

$$(0, o, o | -\gamma - 1; (a, \beta); (b, \alpha + b); (|\sigma|, \epsilon q + \gamma |\sigma|) \text{ mit } \text{falls } |\sigma| > 1$$

$$\alpha a + \beta b = 1, -b < \alpha < 0 < \beta < a \text{ und } 0 < \epsilon q + \gamma |\sigma| < |\sigma|$$

BEWEIS

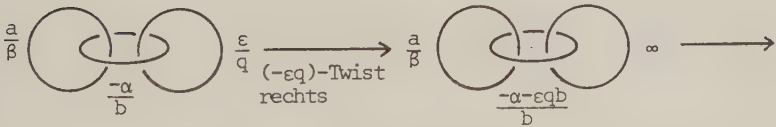
i) Es sei $\sigma = 0$, d.h. $p = ab$, $q = 1$. Nach Satz 6.4 gilt: $M_{p,q}(k_{a,b}) \approx$



$$\frac{a}{b} \bigcirc \bigcirc \frac{b}{\alpha-b} \approx L_{a,\beta} \# L_{b,\alpha-b}$$

Wegen $\alpha a + \beta b = 1$ gilt: $\beta \equiv b^{-1} \pmod{a}$, $\alpha - b \equiv \alpha \equiv a^{-1} \pmod{b}$. Daraus folgt: $L_{a,\beta} \approx L_{a,b}$ und $L_{b,\alpha-b} \approx L_{b,a}$.

ii) Es sei $|\sigma| = 1$, d.h. $\sigma = \epsilon = \pm 1$. Nach Satz 6.4 gilt: $M_{p,q}(k_{a,b}) \approx$



6.5.1 $\frac{a}{b} \bigcirc \bigcirc \frac{-\alpha - \epsilon qb}{b}$

Es seien V_1 und V_2 disjunkte reguläre Umgebungen der linken bzw. rechten Komponente aus 6.5.1. V_1 und V_2 sind Volltori mit

$\pi_1(\partial V_1) \approx \langle \mu_1, \lambda_1 | [\mu_1, \lambda_1] = 1 \rangle$, $i = 1, 2$, wobei μ_1, μ_2 die entsprechenden Meridiane seien. Der Abschluß von $S^3 \setminus (V_1 \cup V_2)$ ist homöomorph zu $S^1 \times S^1 \times I$ mit $\pi_1(S^1 \times S^1 \times I) \approx \langle m, l | [m, l] = 1 \rangle$. Aus der Surgerybeschreibung 6.5.1 folgt:

$M_{p,q}(k_{a,b}) \approx V_1 \cup_{\varphi_1} (S^1 \times S^1 \times I) \cup_{\varphi_2} V_2$ mit Homöomorphismen $\varphi_1: \partial V_1 \rightarrow S^1 \times S^1 \times \{0\}$ und $\varphi_2: \partial V_2 \rightarrow S^1 \times S^1 \times \{1\}$, welche in den Fundamentalgruppen folgende Abbildungen induzieren:

$$\begin{array}{lll} \mu_1 \mapsto l m^\beta & l \mapsto \mu_1^\alpha \lambda_1^\beta & \\ \varphi_1: & \varphi_1^{-1}: & \varphi_2: \mu_2 \mapsto m^{-\alpha-\epsilon q b} l^b. \\ \lambda_1 \mapsto l m^{-\alpha}; & m \mapsto \mu_1^b \lambda_1^{-a}; & \end{array}$$

Wegen $V_1 \cup_{\varphi_1} (S^1 \times S^1 \times I) \approx V_1$ ("Aufdickung" des Randes von V_1) gilt:

$$\begin{aligned} M_{p,q}(k_{a,b}) &\approx V_1 \cup_{\varphi_1^{-1} \varphi_2} V_2, \text{ d.h. da\ss } M_{p,q}(k_{a,b}) \text{ ein Linsenraum ist. F\ur} \\ &\text{die Koeffizienten ergibt sich: } (\varphi_1^{-1} \cdot \varphi_2)(\mu_2) = \varphi_1^{-1}(m^{-\alpha-\epsilon q b} l^b) \\ &= \mu_1^{b(-\alpha-\epsilon q b)} \lambda_1^{-a(-\alpha-\epsilon q b)} \mu_1^\alpha \lambda_1^\beta = \lambda_1^{\alpha a + \beta b + \epsilon q a b} \mu_1^{-\epsilon q b^2} = \lambda_1^{1 + \epsilon q a b} \mu_1^{-\epsilon q b^2} \\ &\text{(wegen } \alpha a + \beta b = 1) = \lambda_1^{\epsilon p} \mu_1^{-\epsilon q b^2} \text{ (wegen } p - a b q = \epsilon = \pm 1). \end{aligned}$$

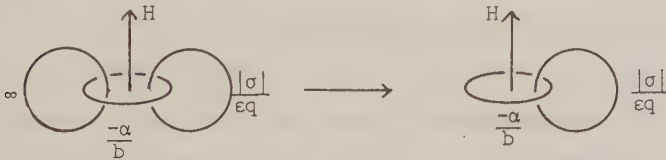
$$\Rightarrow M_{p,q}(k_{a,b}) \approx L_{p, b^2 | q|}. \text{ Aus } p - a b q = \epsilon = \pm 1 \text{ folgt:}$$

$$(a^2 q)(b^2 q) \equiv (a b q)^2 \equiv (-\epsilon)^2 \equiv 1 \pmod{p}, \text{ d.h. } L_{p, b^2 | q|} \approx L_{p, a^2 | q|}.$$

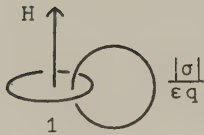
iii) Falls $| \sigma | = | p - a b q | > 1$ gilt, so folgt: $M_{p,q}(k_{a,b}) \approx$

$$6.5.2 \quad \frac{a}{\beta} \quad \begin{array}{c} \uparrow H \\ \text{Diagramm eines Linsenraums mit zwei Komponenten, die durch einen Ring verbunden sind. Der Ring ist mit einem Pfeil nach oben beschriftet mit 'H'. Unter dem Ring steht '-\alpha/b' } \\ \downarrow -\alpha/b \end{array} \quad \frac{| \sigma |}{\epsilon q} \text{ mit: } \alpha a + \beta b = 1, -b < \alpha < 0 < \beta < a, \\ \epsilon = \pm 1.$$

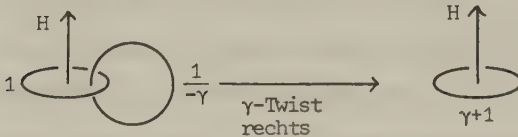
S^3 ohne die drei Knoten aus 6.5.2 läßt sich lokaltrivial über einer zweifach gelochten Scheibe fasern, mit H als einer der S^1 -Fasern. Diese Faserung kann im Sinne von Seifert auf die drei entsprechenden Surgery-Volltori fortgesetzt werden, weil die gewöhnliche Faser H dort auf Grund der Voraussetzungen über die Surgery-Koeffizienten nicht nullhomolog ist. $M_{p,q}(k_{a,b})$ ist somit ein Seifert'scher Faserraum mit S^2 als Zerlegungsfläche und drei Ausnahmefasern, welche den Seelen der drei Surgery-Volltori aus 6.5.2 entsprechen. Zur Bestimmung der Faserinvarianten müssen die drei Ausnahmefasern durch Ausbohren und UMLEBEN entsprechender regulärer Umgebungen in gewöhnliche Fasern überführt werden. Die Obstruktionsinvariante der so entstandenen lokaltrivialen S^1 -Faserung läßt sich durch Ausbohren einer beliebigen Faser bestimmen (siehe [Sei1] Paragraph 7). Während dieses Prozesses sei $M_{p,q}(k_{a,b})$ fest orientiert, wobei die Orientierung durch diejenige von S^3 gemäß der Surgerybeschreibung 6.5.2 induziert sei. Im Rest des Beweises sollen nur die Zwischenergebnisse angegeben werden: Ausbohren der linken Ausnahmefaser aus 6.5.2 liefert die Invariante (a, β) . Nach dem UMLEBEN ergibt sich der Raum:



Durch Ausbohren der Ausnahmefaser bei $\frac{-\alpha}{b}$ ergibt sich die Invariante $(b, \alpha+b)$. Nach dem UMLEBEN entsteht:



Die dritte Ausnahmefaser liefert die Invariante $(|\sigma|, \epsilon q + \gamma|\sigma|)$, wobei $\gamma \in \mathbb{Z}$ durch die Bedingung $0 < \epsilon q + \gamma|\sigma| < |\sigma|$ bestimmt ist. Nach einem weiteren Umkleben entsteht folgende lokaltriviale S^1 -Faserung:



Die entsprechende Obstruktionsinvariante lautet $-\gamma-1$. $\square$

Die Homöomorphieklassifikation der Räume aus Satz 6.5 i) und ii) ergibt sich aus der Klassifikation 0.1 von Linsenräumen, sowie der Eindeutigkeit von zusammenhängenden Summen (siehe [Mi]). Die Räume aus Satz 6.5 iii) werden durch die angegebenen Invarianten bis auf fasertreue Homöomorphie und Orientierung bestimmt, wobei eine Umorientierung die Invarianten $(b, \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle; \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle; \langle \alpha_3, \beta_3 \rangle)$ mit $0 < \beta_i < \alpha_i$, $\langle \alpha_i, \beta_i \rangle = 1$, $i = 1, 2, 3$ nach $(-b-3; \langle \alpha_1, \alpha_1-\beta_1 \rangle; \langle \alpha_2, \alpha_2-\beta_2 \rangle; \langle \alpha_3, \alpha_3-\beta_3 \rangle)$ transformiert (siehe [Sei1] S. 184). Daß es sich dabei schon um eine Homöomorphieklassifikation bis auf Orientierung, d.h. ohne Rücksicht

auf die Faserung, handelt, kann für die "großen" Mannigfaltigkeiten $(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \leq 1)$ der Arbeit [O-V-Z] und für die restlichen Fälle $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ist dabei eines der "platonischen" Tripel $(2, 2, n)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ oder $(2, 3, 5)$ - dem Buch [O] entnommen werden.

Für die Beispiele $M_{9,-1}(k_{3,2})$ und $M_{9,4}(k_{3,2})$ am Anfang dieses Kapitels ergeben sich nach Satz 6.5 folgende Invarianten:

$(0, 0, 0; -2; (2, 1); (3, 2); (15, 14))$ bzw. $(0, 0, 0; -2; (2, 1); (3, 2); (15, 11))$.

Dies zeigt nochmals, daß beide Räume trotz gleicher Ausnahmefaserordnungen nicht homöomorph sind.

SYMBOLVERZEICHNIS

$\cong$	homöomorph, isomorph
$\sim$	homotopieäquivalent
$\sim$	homolog
$\equiv \text{ mod } p$	Gleichheit ganzer Zahlen mod p
$\equiv \text{ mod } t^{p-1}$	Gleichheit von Polynomen mod t^{p-1}
(a,b)	größter gemeinsamer positiver Teiler
$\times$	cartesisches Kreuzprodukt
$\oplus$	direkte Summe
$\otimes$	Tensorprodukt
$*$	Torsionsprodukt
$\circ$	Komposition von Abbildungen
$\bullet$	Schnittzahl von Homologieklassen
$\#$	Summe von 3-Mannigfaltigkeiten
$lk(k_1, k_2)$	Verschlingungszahl zweier Knoten aus S^3
$\langle x_i r_j \rangle$	Gruppenbeschreibung (multiplikativ oder additiv geschrieben)
$[a,b]$	Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$
$\mathbb{Z}G$	Gruppenring einer Gruppe G
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	freie Ableitungen in $\mathbb{Z}\langle x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$
$\Delta_k(t)$	Alexanderpolynom eines Knotens k
Δ^*	Brody-Abbildung

LITERATUR

- [A-A] Ayoub, R.G., Ayoub, C.: On the group ring of a finite abelian group, *Bull. Austral. Math. Soc.* 1, 245-261 (1969)
- [Bra] Brakes, W.R.: Manifolds with multiple knot-surgery descriptions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 87, 443-448 (1980)
- [Bro] Brody, E.J.: The topological classification of the lens spaces, *Annals of Mathematics* Vol. 71 No. 1, 163-184 (1960)
- [B-R] Bailey, J., Rolfsen, D.: An unexpected surgery construction of a lens space, *Pacific Journal of Mathematics* Vol. 71 No. 2, 295-298 (1977)
- [C-F] Crowell, R.H., Fox, R.H.: Introduction to knot theory, Springer Verlag, New York (1963)
- [D] Dehn, M.: Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Mathematische Annalen* 69, 137-168 (1910)
- [F] Fox, R.H.: Free differential calculus I und II, *Annals of Mathematics*, Vol. 57 No. 3, 547-560 (1953) und Vol. 59 No. 2, 196-210 (1954)
- [F-S] Fintushel, R., Stern, R.J.: Constructing lens spaces by surgery on knots, *Math. Zeitschrift* 175, 33-51 (1980)
- [G] Gordon, C.McA.: Some aspects of classical knot theory, *Lecture Notes in Mathematics* 685, 1-60 (1978)
- [H] Hempel, J.: 3-Manifolds, *Annals of Mathematics Studies* 86, Princeton University Press (1976)

- [K] Kirby, R.: A calculus for framed links in S^3 , *Inventiones Math.* 45, 35-56 (1978)
- [K-M] Kirby, R., Melvin, P.: Slice knots and property R, *Inventiones Math.* 45, 57-59 (1978)
- [Kn] Kneser, H.: Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 38, 248-260 (1929)
- [L] Lickorish, W.B.R.: A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, *Annals of Math.* 76, 531-538 (1962)
- [Mi] Milnor, J.: A unique factorization theorem for 3-manifolds, *Amer. J. Math.* 84, 1-7 (1962)
- [Moi] Moise, E.E.: Affine structures in 3-manifolds V. the triangulation theorem and Hauptvermutung, *Annals of Math.* 55, 96-114 (1952)
- [Mo1] Moser, L.: Elementary surgery along a torus knot, *Pacific Journal of Mathematics* Vol. 38 No. 3, 737-745 (1971)
- [Mo2] Moser, L.: On the impossibility of obtaining $S^2 \times S^1$ by elementary surgery along a knot, *Pacific Journal of Mathematics* Vol. 53 No. 2, 519-523 (1974)
- [N] Neuzil, J.P.: Elementary surgery manifolds and the elementary ideals, *Proceedings A.M.S.* 68, 225-228 (1978)
- [O] Orlik, P.: Seifert Manifolds, *Lecture Notes in Mathematics* 291, Springer-Verlag (1972)
- [O-V-Z] Orlik, P., Vogt, E., Zieschang, H.: Zur Topologie gefaserner dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Topology* 6, 49-64 (1967)

- [P] Papakyriakopoulos, C.D.: On Dehn's lemma and the asphericity of knots, Ann. of Math. 66, 1-26 (1957)
- [Rei] Reidemeister, K.: Homotopieringe und Linsenräume, Abh. Math. Sem. Hamburg 11, 102-109 (1935)
- [Ro] Rolfsen, D.: Knots and Links, Publish or Perish, INC., Berkeley (1976)
- [Sei1] Seifert, H.: Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume, Acta Math. 60, 147-238 (1933)
- [Sei2] Seifert, H.: Über das Geschlecht von Knoten, Math. Annalen 110, 571-592 (1934)
- [S-T] Seifert, H., Threlfall, W.: Lehrbuch der Topologie, Leipzig (1934), neu aufgelegt von Chelsea Publishing Company New York
- [Spa] Spanier, E.H.: Algebraic Topology, McGraw-Hill Book Company, New York (1966)
- [W] Wallace, A.H.: Modifications and cobounding manifolds, Canadian J. Math. 12, 503-528 (1960)
- [Skript 1] Skriptum: Algebraische Topologie, R. Stöcker, H. Zieschang RUB (1979/80)
- [Skript 2] Skriptum: Knotentheorie, H. Zieschang, RUB (1977)

LEBENS LAUF

1.9.1950	geboren in Oker/Harz als Sohn von Irmgard Krause, geborene Stoye, und Karl Krause
April 1957	Einschulung in die Volksschule in Oker
1959	Umzug nach Ennepetal in Westfalen
1962-1970	Besuch des Reichenbach-Gymnasiums in Ennepetal
Juli 1970	Abitur
WS 70/71	Immatrikulation an der Ruhr-Universität Bochum in den Fächern Mathematik und Physik
August 1972	Zwischenprüfung im Fach Mathematik
Oktober 1973 - Januar 1975	Zivildienst im Augusta-Krankenhaus in Bochum
SS 1975	Wiederaufnahme des Studiums
Februar 1976	Vordiplom in Mathematik mit Nebenfach Physik
August 1979	Diplom
September 1979	Einstellung als Wissenschaftliche Hilfskraft an der Ruhr-Universität Bochum

